

ANNEXE A1 : UNITÉS DE MESURE DE BRUITS

Dans l'industrie, plusieurs unités de mesure sont utilisées pour caractériser les bruits. Certaines d'entre elles se réfèrent à des courbes de pondération particulières des tonalités audio. Rappelons à la Figure A1.1 que la notion de bruit blanc se réfère à un bruit non pondéré, également réparti sur l'ensemble des fréquences :

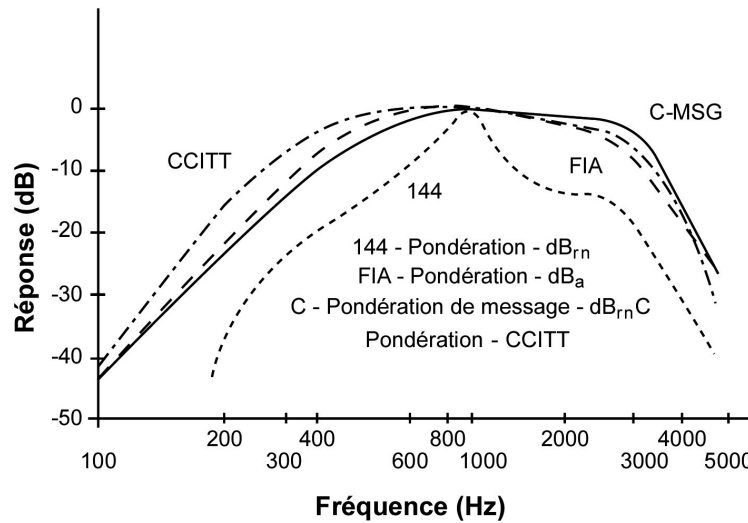


Figure A1.1 : Différentes pondérations simulantes les caractéristiques fréquentielles de combinés types

Le **dBm** est utilisé couramment comme unité de mesure de puissance. Ainsi, une puissance P (en watts) correspond à :

$$P_{dBm} = 10 \log \left(\frac{P}{1 \text{ mW}} \right) \quad [\text{dBm}] \quad (\text{A1.1})$$

Le **dBmV** est également utilisé pour caractériser une puissance en se basant sur une mesure de tension en volts :

$$P_{dBmV} = 20 \log \left(\frac{V}{1 \text{ mV}} \right) \quad [\text{dBmV}] \quad (\text{A1.2})$$

Le **pWp** (*Picowatt Phosphorically Weighted*) est équivalent à une tonalité de 800 Hertz dont le niveau de puissance est de -90 dBm (pondération CCITT).

Le **dBmP** est le niveau de puissance en dB mesuré par rapport à une tonalité de 800 Hz dont la puissance est de -90 dBm (pondération CCITT).

Le **dBm** est le niveau de puissance en dB mesuré par rapport à une tonalité de 1 kHz dont la puissance est de -90 dBm (pondération Western Electric).

Le **dBa** est le niveau de puissance en dB mesuré par rapport à une tonalité de 1 kHz dont la puissance est de -85 dBm (pondération FIA).

Le **dBmC** est le niveau de puissance en dB mesuré par rapport à une tonalité de 1 kHz dont la puissance est de -90 dBm (pondération C).

Le **dBm0** est le niveau de puissance en dB mesuré par rapport à un point de test dont la puissance est de 0dBm.

Le rapport $\left(\frac{S}{N}\right)^*$ est défini par le rapport (en dB) entre la puissance S relative à un niveau de référence nul et la puissance N (non pondérée) d'un bruit blanc dans un canal vocal de 3 kHz.

Les unités **dBr**, **dBm0p**, **dBa0**, **dBmnc0** et **pWp0** sont définies par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ dBr} = x \text{ dBm} - \text{dBm0} \\ x \text{ dBm0p} = -2.5 - \left(\frac{S}{N}\right)^* \\ x \text{ dBa0} = 81.5 - \left(\frac{S}{N}\right)^* \\ x \text{ dBmnc0} = 88.3 - \left(\frac{S}{N}\right)^* \\ 10 \log (x \text{ pWp0}) = 87.5 - \left(\frac{S}{N}\right)^* \end{array} \right. \quad (\text{A1.3})$$

Notons les relations suivantes entre les échelles de mesure de bruits :

$$10 \log (\text{pWp0}) = \text{dBa0} + 6 = \text{dBm0p} + 90 \text{ (pour les mesures de bruits)} \quad (\text{A1.4})$$

$$\text{dBmnc0} = 88 - \left(\frac{S}{N}\right)^* , \text{ dans le cas de bruit blanc} \quad (\text{A1.5})$$

**ANNEXE A2 : CALCUL DE LA DIFFÉRENCE DE TRAJET ENTRE ONDES
DIRECTES ET ONDES RÉFLÉCHIES**

Calculons la différence de parcours Δd entre l'onde directe et l'onde réfléchie en nous appuyant sur la Figure A2.1 suivante :

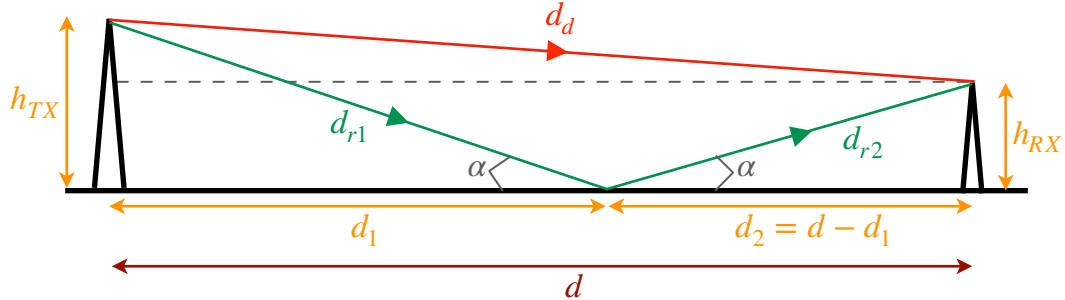


Figure A2.1 : Schéma d'une liaison hertzienne

❖ **Calcul du trajet parcouru d_d par l'onde directe :**

$$\text{En utilisant le théorème de Pythagore : } d_d^2 = (h_{TX} - h_{RX})^2 + d^2 \quad (\text{A2.1})$$

$$\text{C'est-à-dire : } d_d^2 = d^2 \left[1 + \left(\frac{h_{TX} - h_{RX}}{d} \right)^2 \right] \quad (\text{A2.2})$$

$$\text{Soit : } d_d = d \sqrt{1 + \left(\frac{h_{TX} - h_{RX}}{d} \right)^2} \quad (\text{A2.3})$$

Or, pour : $\varepsilon \ll 1$, $(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$

$$\text{Ici, } \sqrt{1 + \varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{A2.4})$$

$$\text{Nous obtenons : } d_d \simeq d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_{TX} - h_{RX}}{d} \right)^2 \right] \quad (\text{A2.5})$$

❖ **Calcul du trajet parcouru d_r par l'onde réfléchie :**

$$d_r = d_{r1} + d_{r2} \quad (\text{A2.6})$$

$$\text{Or : } \sin(\alpha) = \frac{h_{TX}}{d_{r1}} = \frac{h_{RX}}{d_{r2}} = \frac{h_{TX} + h_{RX}}{d_r} \quad (\text{A2.7})$$

$$\text{et : } \cos(\alpha) = \frac{d_1}{d_{r1}} = \frac{d_2}{d_{r2}} = \frac{d_1 + d_2}{d_r} = \frac{d}{d_r} \quad (\text{A2.8})$$

$$\text{Soit : } d_r = \frac{h_{TX} + h_{RX}}{\sin(\alpha)} = \frac{d}{\cos(\alpha)} \quad (\text{A2.9})$$

$$\text{D'où : } \tan(\alpha) = \frac{h_{TX} + h_{RX}}{d_1 + d_2} = \frac{h_{TX} + h_{RX}}{d} \quad (\text{A2.10})$$

$$\text{En nous basant sur la relation : } \cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} \quad (\text{A2.11})$$

$$\frac{d^2}{d_r^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{h_{TX} + h_{RX}}{d}\right)^2} \quad (\text{A2.12})$$

$$\text{Soit : } d_r^2 = d^2 + (h_{TX} + h_{RX})^2 = d^2 \left[1 + \left(\frac{h_{TX} + h_{RX}}{d}\right)^2 \right] \quad (\text{A2.13})$$

$$\text{D'où : } d_r = d \sqrt{1 + \left(\frac{h_{TX} + h_{RX}}{d}\right)^2} \quad (\text{A2.14})$$

$$\text{Pour } h_{TX} \ll d \text{ et } h_{RX} \ll d : \boxed{d_r \simeq d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_{TX} + h_{RX}}{d}\right)^2 \right]} \quad (\text{A2.15})$$

❖ **Calcul de la différence de parcours Δd :**

Pour ce faire, reprenons les formules (A2.5) et (A2.15) mises en évidence précédemment.

$$\Delta d = d_r - d_d \quad (\text{A2.16})$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } \Delta d &= d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_{TX} + h_{RX}}{d}\right)^2 \right] - d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_{TX} - h_{RX}}{d}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2d} \left[(h_{TX} + h_{RX})^2 - (h_{TX} - h_{RX})^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.17})$$

$$= \frac{1}{2d} \left[(h_{TX} + h_{RX} - (h_{TX} - h_{RX})) \cdot (h_{TX} + h_{RX} + (h_{TX} - h_{RX})) \right]$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\Delta d = \frac{2 h_{TX} h_{RX}}{d}} \quad (\text{A2.18})$$

ANNEXE A3 : CALCULS D'ANTENNES

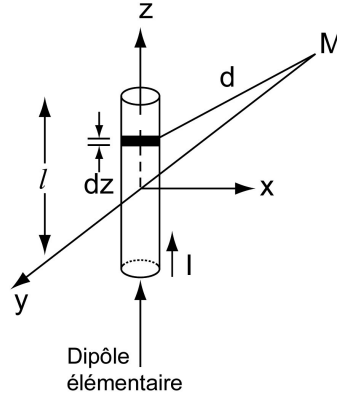


Figure A3.1 : Dipôle électrique élémentaire

Considérons la Figure A3.1, dans laquelle nous supposons que la longueur d'antenne l est négligeable par rapport à la longueur d'onde de la source λ alimentant l'antenne. Le vecteur potentiel magnétique \vec{A} produit au point M sera calculé à l'aide de la formule suivante :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}}{d} dv \quad (\text{A3.1})$$

Où :

- ❖ $dv = S dz$
- ❖ S : section du fil formant l'antenne

La densité de flux magnétique \vec{B} se calcule à l'aide du vecteur potentiel \vec{A} :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A3.2})$$

Le champ \vec{H} se calcule à l'aide du vecteur potentiel \vec{A} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{A3.3})$$

Le champ \vec{E} peut également être calculé en fonction du vecteur potentiel magnétique \vec{A} et du potentiel électrique V :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{A3.4})$$

A3.1. Calcul du vecteur potentiel magnétique \vec{A} produit par un dipôle électrique élémentaire : ($l \ll \lambda$)

- ❖ λ : longueur de l'onde rayonnée
- ❖ l : longueur du dipôle

Posons la relation suivante : $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}}{d} dv$ (A3.1)

En se référant à la Figure A3.1, nous pouvons écrire : $\vec{J} = \vec{I}_z \times \frac{I}{S}$ et $dv = S dz$

D'où : $\vec{J} = I \frac{dz}{dv} \times \vec{I}_z$ (A3.5)

En substituant la valeur de \vec{J} dans l'expression pour \vec{A} , nous obtenons :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{I}{d} dz \times \vec{I}_z$$
 (A3.6)

Mais, puisque I est constant le long de l'antenne (étant donné que $l \ll \lambda$) :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \times \vec{I}_z = \frac{\mu_0 I \times l}{4\pi d} \times \vec{I}_z$$
 (A3.7)

Le vecteur potentiel produit par un courant $I = I_0 e^{j\omega t}$ à une distance d de l'antenne sera donc :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \times I_0 \times l}{4\pi d} e^{j\omega(t - \frac{d}{c})} \times \vec{I}_z$$
 (A3.8)

Notons que le retard de propagation $\frac{d}{c}$ du vecteur potentiel a été pris en considération. Puisque M est loin de l'antenne, nous pouvons utiliser l'approximation $d \approx r$.

D'où : $\vec{A} = \frac{\mu_0 \times I_0 \times l}{4\pi r} e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \times \vec{I}_z$ (A3.9)

A3.2. Calcul du champ magnétique \vec{H} produit par un dipôle élémentaire

Pour pouvoir calculer le champ magnétique \vec{H} , nous allons exprimer le vecteur \vec{A} en coordonnées sphériques. Nous référant à la Figure A3.2, nous pouvons écrire :

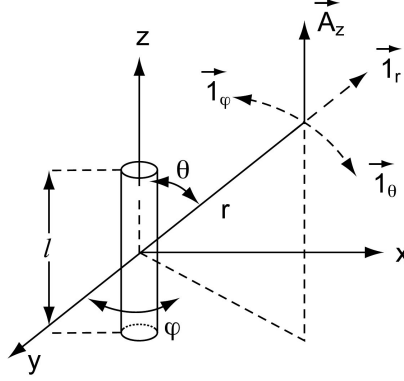


Figure A3.2 : Antenne dipôle élémentaire

$$\begin{cases} A_r = A_z \cos \theta \\ A_\theta = -A_z \sin \theta \\ A_\phi = 0 \end{cases}$$

De façon générale : $\vec{A} = A_r \vec{1}_r + A_\theta \vec{1}_\theta + A_\phi \vec{1}_\phi$ (A3.10)

En coordonnées sphériques, le rotationnel d'un champ vectoriel est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \cdot \vec{1}_r + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} \right) (r A_\phi) \cdot \vec{1}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{1}_\phi \end{aligned} \quad \text{(A3.11)}$$

Nous pouvons effectuer les simplifications suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi \sin \theta = 0 & \text{car } A_\phi = 0 \\ \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial A_r}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = A_\phi = 0 \end{cases} \quad \text{(A3.12)}$$

Seule la composante du vecteur \vec{A} suivant ϕ n'est pas nulle :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{1}_\phi \quad (\text{A3.13})$$

Le champ magnétique \vec{H} correspondant est :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\vec{1}_\phi}{r\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) \right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \quad (\text{A3.14})$$

Calculons maintenant : $\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta)$ et $\frac{\partial A_r}{\partial \theta}$

$$\begin{aligned} \ast \frac{\partial}{\partial r} rA_\theta &= \frac{\partial}{\partial r} (-rA_r \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left[-r \left(\frac{\omega_0 I_0 l}{4\pi r} \times e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \right) \sin \theta \right] \\ &= \frac{j\omega}{c} \times \frac{\omega_0 I_0 l}{4\pi} \times e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\ast \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (A_z \cos \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\omega_0 I_0 l}{4\pi r} \times e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \cos \theta = -\frac{\omega_0 I_0 l}{4\pi r} \times e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \sin \theta$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{1}_\phi}{r\omega_0} \left(\frac{j\omega}{c} \times \frac{\omega_0 I_0 l}{4\pi} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \sin \theta + \frac{\omega_0 I_0 l}{4\pi r} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \sin \theta \right)$$

$$\text{D'où : } \vec{H} = \left[\frac{I_0 l}{4\pi} \times \frac{j\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \sin \theta \right] \cdot \vec{1}_\phi \quad (\text{A3.15})$$

Le champ électrique \vec{E} est : $\vec{E} = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{H}$ (A3.16)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (H_\phi \sin \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \cdot \vec{I}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta H_\phi) \right] \cdot \vec{I}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \cdot \vec{I}_\phi \end{aligned} \quad (\text{A3.17})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \times \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta H_\phi) \cdot \vec{I}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \times \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta H_\phi) \cdot \vec{I}_\theta \quad (\text{A3.18})$$

Notons que : $E_\phi = 0$

Il s'ensuit que :

$$E_\theta = \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[\frac{j\omega}{rc^2} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega^3} \right] e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \quad (\text{A3.19})$$

Et,

$$E_r = \frac{I_0 l}{2\pi\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right] e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \quad (\text{A3.20})$$

Récapitulons les résultats obtenus :

$$\begin{aligned} H_r &= H_\theta = E_\phi = 0 \\ H_\phi &= \frac{I_0 l}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{j\omega}{rc^2} + \frac{1}{r^2} \right] e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\ E_\theta &= \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[\frac{j\omega}{rc^2} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega^3} \right] e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \\ E_r &= \frac{I_0 l}{2\pi\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right] e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \end{aligned} \quad (\text{A3.21})$$

Réécrivons ces trois expressions en multipliant par $\frac{\omega^2}{\omega^2}$ la partie droite afin de mettre en évidence les puissances de $\left(\frac{r}{\lambda}\right)$.

$$H_\phi = \frac{I_0 l}{4\pi} \sin \theta e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \times \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \left[\frac{j}{2\pi c^2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)} + \frac{1}{(2\pi c)^2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)} \right] \quad (\text{A3.22})$$

$$E_\theta = \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \times \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \left[\frac{j}{2\pi c^3 \left(\frac{r}{\lambda}\right)} + \frac{1}{(c^3 4\pi^2) \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2} + \frac{1}{j(2\pi c)^3 \left(\frac{r}{\lambda}\right)^3} \right] \quad (\text{A3.23})$$

$$E_r = \frac{I_0 l}{2\pi\epsilon_0} \cos \theta e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \times \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \left[\frac{1}{(c^3 4\pi^2) \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2} + \frac{1}{j(2\pi c)^3 \left(\frac{r}{\lambda}\right)^3} \right] \quad (\text{A3.24})$$

A3.3. Champs électrique et magnétique en zone lointaine

Pour les distances $r \gg \lambda$, les termes ayant au dénominateur $\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$ et $\left(\frac{r}{\lambda}\right)^3$ tendront vers zéro.

Il s'ensuit donc que : $E_r \approx 0$

$$H_\phi = \frac{I_0 l}{4\pi} \sin \theta e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \times \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \times \frac{j\lambda}{2\pi c^2 r} = \frac{I_0 l}{4\pi} \sin \theta e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \times \frac{2\pi j}{\lambda} \quad (\text{A3.25})$$

$$\text{Soit : } H_\phi = \frac{j\omega I_0 l}{4\pi r c} \sin \theta e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \quad (\text{A3.26})$$

$$E_\theta = \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \times \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \times \frac{j\lambda}{2\pi c^3 r} \quad (\text{A3.27})$$

$$\text{Soit : } E_\theta = \frac{j\omega I_0 l}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \theta e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \quad (\text{A3.28})$$

Étant donné que :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \text{ et que } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi$$

Les expressions de E_θ et H_ϕ , dans la zone lointaine, seront :

$$\begin{cases} H_\phi = \frac{j}{2} \times \frac{I_0 l}{\lambda r} j e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \sin \theta \\ E_\theta = j60\pi \times \frac{I_0 l}{\lambda r} j e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \sin \theta \end{cases} \quad (\text{A3.29})$$

A3.4. Dérivation des paramètres d'antennes

Paramètres d'une antenne dipôle élémentaire $l \ll \lambda$.

❖ Puissance rayonnée

$$P = \frac{1}{2} \Re \int_s E_\theta H_\phi^* ds = \frac{Z_0 \omega^2 I_0^2 l^2}{12\pi c^2} \quad (\text{A3.30})$$

Avec $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi = r^2 d\Omega$ (élément de surface solide d'une sphère de rayon r).

❖ Résistance de rayonnement R_r

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2 \quad (\text{A3.31})$$

$$\text{Où : } R_r = 80\pi^2 \left(\frac{dz}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{A3.32})$$

❖ Coefficient d'efficacité d'antenne η

r = résistance ohmique de l'antenne

$$\eta = \frac{R_r}{R_r + r} = \frac{\text{puissance rayonnée par l'antenne}}{\text{puissance électrique fournie à l'antenne}} = \frac{P}{P_e} \quad (\text{A3.33})$$

❖ Digramme de rayonnement d'antenne

Le digramme décrit la puissance rayonnée dans l'angle solide $d\Omega$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle \vec{S} \rangle r^2 \quad (\text{A3.34})$$

$$P = \int_{\Omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right) \quad (\text{A3.35})$$

❖ Digramme de rayonnement normalisé

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{norm}} = \frac{\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)}{\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{max}}} \quad (\text{A3.36})$$

Pour le dipôle élémentaire :

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{max}} = \frac{Z_0}{8} I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{A3.37})$$

$$\text{Et : } \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{norm}} = \sin^2 \theta \quad (\text{A3.38})$$

❖ Angle solide de faisceau rayonné

$$\Omega_A = \int \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{norm}} d\Omega \quad (\text{A3.39})$$

Pour le dipôle élémentaire : $\Omega_A = \frac{8\pi}{3}$

Pour une antenne isotropique : $\Omega_A = 4\pi$

❖ Directivité D

$$D = \frac{\text{densité de puissance dans la direction du lobe principal}}{\text{densité de puissance si l'antenne était isotropique}} = \frac{\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{max}}}{\frac{P}{4\pi}}$$

$$D = \frac{4\pi}{\int \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{norm}} d\Omega} = \frac{4\pi}{\Omega_A} > 1 \quad (\text{A3.40})$$

❖ Gain G

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\text{densité de puissance dans la direction du lobe principal}}{\text{densité de puissance d'une antenne isotropique supposée sans pertes}} \\
 &= \frac{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\max}}{\frac{P_e}{4\pi}} = \frac{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{\max}}{\frac{P}{4\pi}} \times \eta \\
 &= \eta \times D
 \end{aligned} \tag{A3.41}$$

❖ Ouverture effective d'antenne

$$\begin{aligned}
 A_e &= \frac{\text{puissance rayonnée maximale en cas d'adaptation d'impédance}}{\langle S \rangle} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} R_r I_0^2}{\langle S \rangle} = \frac{3}{8\pi} \times \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{\Omega_A} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \times D
 \end{aligned} \tag{A3.42}$$

A3.5. Paramètres d'antennes dipôles résonantes de longueur $L = \eta \frac{\lambda}{2}$

$$I = I_0 e^{j\omega t} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \times \left(\frac{L}{2} - |z|\right) \quad 0 < |z| < \frac{L}{2} \tag{A3.43}$$

$$E_\theta = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{dE_\theta}{dz}\right) dz \tag{A3.44}$$

En tenant compte du nouveau courant dans les expressions des champs électrique et magnétique d'une antenne dipôle élémentaire, nous déduisons pour la zone lointaine :

$$E_\theta = j \frac{60 I_0}{r} e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \times \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta\right) - \cos \frac{\pi L}{\lambda}}{\sin \theta} \right] \tag{A3.45}$$

a) Pour l'antenne de Hertz : $L = \frac{\lambda}{2}$

$$E_{\theta} = j \frac{60 I_0}{r} e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \times \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \quad (\text{A3.46})$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right) = \frac{(60 I_0)^2}{2Z_0} e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \times \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (\text{A3.47})$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\max} = \frac{(60 I_0)^2}{2Z_0} \quad (\text{A3.48})$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{norm}} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (\text{A3.49})$$

$R_r = 73.2 \Omega$. Cette valeur est souvent arrondie à 75Ω .

$$\Omega_A = 2.44 \pi$$

$$D = 1.65$$

b) Pour l'antenne : $L = \lambda$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{norm}} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (\text{A3.50})$$

$$P = \frac{2\pi(60 I_0^2)}{2Z_0} \times 3.35 \quad \text{et} \quad R_r = 201 \Omega$$

A3.6. Hauteur effective d'une antenne de Hertz

La hauteur effective d'une antenne de réception est définie par le rapport de la tension induite à l'antenne sur l'intensité de réception du champ régnant à l'endroit même de l'antenne de réception.

$$h_e = \frac{V}{E} \quad [\text{m}] \quad (\text{A3.51})$$

Considérons une antenne de Hertz transmettant une puissance P_{TX} à une autre antenne de Hertz de même polarité et distante de d . La densité de puissance de rayonnement mesurée à cette seconde antenne vérifie :

$$\frac{P_{TX}}{4\pi d^2} \times G_{TX} = \frac{E^2}{Z_0} \quad \left[\text{W/m}^2 \right] \quad (\text{A3.52})$$

Où G_{TX} est le gain de directivité de l'antenne de transmission, ici, une antenne de Hertz ($G_{TX} = 1.65$). Cette densité de puissance est proportionnelle au carré du champ électrique existant et inversement proportionnelle à l'impédance caractéristique de l'air ($Z_0 = 120 \pi$). La puissance reçue à l'antenne de réception est :

$$P_{RX} = \frac{E^2}{Z_0} \times A_{RX} \quad [\text{W}] \quad (\text{A3.53})$$

Où A_{RX} est la surface effective de l'antenne de réception. Cette dernière est reliée au gain G_{RX} selon la relation générale :

$$G = \frac{4\pi A}{\lambda^2} \quad (\text{A3.54})$$

$$\text{D'où : } P_{RX} = \frac{E^2}{Z_0} \times \frac{\lambda^2 G_{RX}}{4\pi} \quad [\text{W}] \quad (\text{A3.55})$$

Or, l'antenne de réception est normalement adaptée à l'impédance d'entrée du récepteur. La tension induite sur l'antenne se divise donc entre la résistance d'antenne R_A (75Ω dans le cas d'une antenne de Hertz) et l'impédance d'entrée du récepteur.

$$\text{D'où : } P_{RX} = \frac{\left(\frac{V}{2}\right)^2}{R_A} = \frac{V^2}{4R_A} = \frac{E^2 h_e^2}{4R_A} \quad [\text{W}] \quad (\text{A3.56})$$

Égalisons ces deux puissances :

$$P_{RX} = \frac{E^2}{Z_0} \times \frac{\lambda^2}{4\pi} \times G_{RX} = \frac{E^2 h_e^2}{4R_A} \quad [\text{W}] \quad (\text{A3.57})$$

Avec : $Z_0 = 120 \pi$, $G_{RX} = 1.65$, $R_A = 75 \Omega$

D'où :

$$h_e = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{4 \times 75 \times 1.65}{120 \times 4}} \quad [\text{m}]$$

$$\simeq \frac{\lambda}{\pi} \quad [\text{m}] \quad (\text{A3.58})$$

A3.7. Réseau d'antennes parallèles

Soit deux antennes distantes de d comme représentées à la Figure A3.3. Les champs électriques E_1 et E_2 produits par chacune d'elles sont :

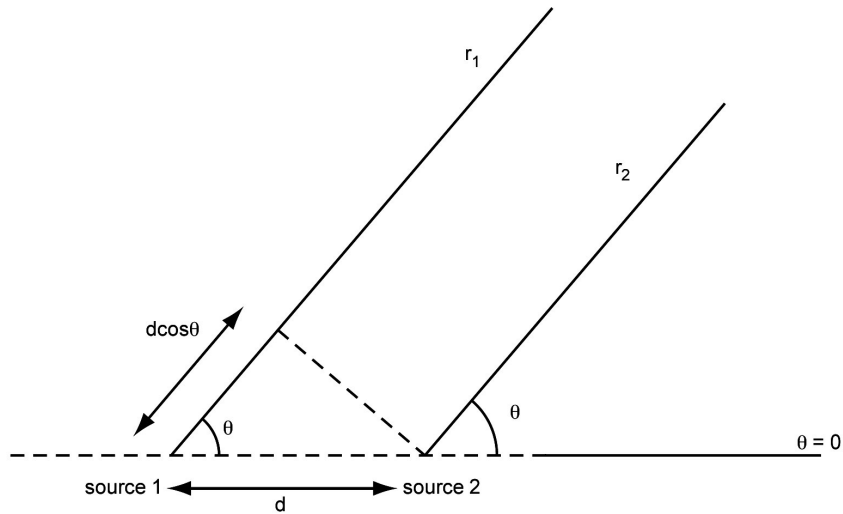


Figure A3.3 : Antennes parallèles

E_1 est proportionnel à $\frac{1}{r_1} e^{j\omega(t - \frac{r_1}{c})}$ et E_2 est proportionnel à $\frac{1}{r_2} e^{j\omega(t - \frac{r_2}{c})}$

En posant $r_1 = r_2 - d \cos \theta$, il en résulte que le champ électrique total $E = E_1 + E_2$ est approximativement proportionnel à $E_1 (1 + e^{j\phi})$ avec $\phi = \frac{\omega d}{c} \cos \theta + \delta$, où δ représente la différence des phases de l'alimentation de chacune des antennes.

Dans le cas de plusieurs sources E_1, E_2, \dots, E_n respectivement alimentées avec les déphasages successifs de $\delta, 2\delta, 3\delta, \dots, n\delta$, le champ total est :

$$\begin{aligned}
E &= E_1 (1 + e^{j\phi} + e^{2j\phi} + \dots + e^{jn\phi}) = E_1 \times \frac{1 - e^{jn\phi}}{1 - e^{j\phi}} \\
&= E_1 \times \frac{\sin \frac{n\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} e^{j(n-1)\frac{\phi}{2}}
\end{aligned} \tag{A3.59}$$

$$\text{D'où le patron de rayonnement : } \left(\frac{dP}{d\Omega} \right) = \frac{E_1^2}{2Z_0} \times \frac{\sin^2 \left(r \frac{\phi}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \tag{A3.60}$$

Dont la valeur maximale est atteinte pour $\phi = 0$, soit $\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\max} = r^2 \frac{E_1^2}{2Z_0} \times n^2$
(après application du théorème de l'Hôpital).

$$\text{D'où le patron de rayonnement normalisé : } \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{norm}} = \frac{1}{n^2} \times \frac{\sin^2 \left(n \frac{\phi}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \tag{A3.61}$$

Notons que pour une valeur de déphasage δ^* donnée, la direction du lobe principal est orientée dans la direction θ^* comme $\cos \theta^* = -\frac{c}{\omega d} \delta^*$.

ANNEXE A4 : COMPLÉMENTS DE NOTIONS MATHÉMATIQUES

A4.1. Notions de traitement du signal continu et discret

A4.1.1. Convolution

Définition convolution (*Convolution*) : La convolution est un outil mathématique qui sera utilisé pour modéliser la transformation causée par un filtre sur un signal.

- ❖ Convolution de deux signaux à temps continu :

$$(x \star y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \quad (\text{A4.1})$$

- ❖ Convolution de deux signaux à temps discret :

$$(x \star y)(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)y(n - i) \quad (\text{A4.2})$$

Propriétés de la convolution :

- ❖ **Commutative :** $(x \star y)(t) = (y \star x)(t)$
- ❖ **Associative :** $((x \star y) \star z)(t) = (x \star (y \star z))(t)$
- ❖ **Distributive par addition :** $(x \star (y + z))(t) = (x \star y)(t) + (x \star z)(t)$

Remarque : Lien entre la convolution et la transformation de Fourier:

- ❖ $\mathcal{F}[x(t) \star y(t)] = X(f) \cdot Y(f) \quad (\text{A4.3})$

- ❖ $\mathcal{F}[x(t) \cdot y(t)] = X(f) \star Y(f) \quad (\text{A4.4})$

A4.1.2. Impulsion de Dirac

Définition impulsion de Dirac (*Dirac pulse*) : Permet de localiser ou décaler dans le temps ou en fréquence, périodiser ou échantillonner un signal.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (\text{A4.5})$$

Propriétés :

$$\diamond \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \tag{A4.6}$$

❖ Échantillonnage d'un signal $x(t)$ à la période T :

$$x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta(t - kT) \tag{A4.7}$$

❖ Périodisation à la période T d'un signal $x(t)$:

$$x(t) \star \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \tag{A4.8}$$

A4.1.3. Produit scalaire, norme et distance

Définitions produit scalaire, norme et distance entre deux signaux :

- ❖ Le **produit scalaire** permet de mesurer l'alignement entre les signaux normés. Par exemple, deux signaux orthogonaux ont un produit scalaire nul.
- ❖ La **norme** est la grandeur du signal.
- ❖ La **distance** est la distance entre deux signaux.

Formules : Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux d'énergie finie (c'est-à-dire ayant une énergie bornée). Nous notons par $y^*(t)$ la valeur conjuguée de $y(t)$ et définissons :

	SIGNAL À TEMPS CONTINU	SIGNAL À TEMPS DISCRET
Produit scalaire $\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$	$\langle x, y \rangle = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) y^*(i)$
Norme de x $\ x\ $	$\ x\ = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt}$	$\ x\ = \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) ^2}$
Distance $d(x, y)$	$d(x, y) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) - y(t) ^2 dt}$	$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) - y(i) ^2}$

Tableau A4.1 : Produit scalaire, norme et distance

A4.1.4. Inégalité de Cauchy-Schwarz

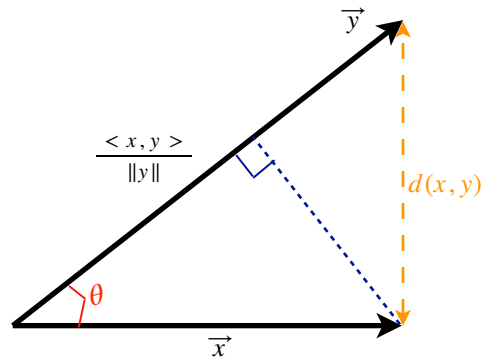
Inégalité de Cauchy-Schwarz (Cauchy-Schwarz's Inequality) :

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{A4.9}$$

Remarque : L'égalité a lieu lorsque x et y sont colinéaires, c'est-à-dire quand $x = k \cdot y$ où k est une constante.

Preuve simplifiée : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit x et y , deux signaux représentés comme suit :



En utilisant les propriétés des triangles rectangles, nous avons : $\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\| \|x\|}$

Or : $|\cos(\theta)| \leq 1$ c.à.d $\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\| \|x\|} \leq 1$

D'où la relation $|\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|$

L'égalité a lieu lorsque : $|\cos(\theta)| = 1$ soit quand $\theta = 0$ ou π

Autrement dit, x et y sont colinéaires.

Nous obtenons alors : $|\langle x, y \rangle| = \|y\| \cdot \|x\|$

Remarque : Dans le cas de signaux à temps continu, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

prend la forme : $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt}$ (A4.10)

Ou encore : $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$ (A4.11)

Preuve : Inégalité de Cauchy-Schwarz sous forme d'intégrale

$$\text{Soit : } \lambda \in \mathfrak{R} \text{ et } P(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) + \lambda \cdot y^*(t)|^2 dt$$

$$P(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 + 2\lambda |x(t) \cdot y^*(t)| + \lambda^2 \cdot |y^*(t)|^2 dt$$

Ce polynôme du second degré, $P(\lambda)$, est toujours supérieur ou égal à 0, et ce, quelle que soit la valeur de λ . Cela implique que son discriminant est soit négatif, soit nul.

$$\text{C'est-à-dire : } \Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

$$\text{Soit : } \Delta = 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) \cdot y^*(t)| dt \right)^2 - 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |y^*(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \leq 0$$

$$\text{Où : } \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

A4.1.5. Corrélation

Définition :

❖ **L'autocorrélation (autocorrelation)** d'un signal est égale au produit scalaire de $x(t)$ par $x(t)$ retardé de τ :

$$C_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle \quad (\text{A4.12})$$

❖ **L'intercorrélation (cross-correlation)** est le produit d'un signal $x(t)$ avec un signal $y(t)$ retardé de τ :

$$C_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle \quad (\text{A4.13})$$

Propriété : L'autocorrélation d'un signal ($\tau = 0$) est égale à son énergie :

$$C_x(0) = E_x = \|x\|^2 \quad (\text{A4.14})$$

Preuve : Pour le cas d'un signal à temps continu

$$C_x(0) = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2 = E_x$$

Remarque : Lien entre la convolution et la corrélation :

$$\diamond C_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau) \quad (\text{A4.15})$$

$$\diamond C_{xy}(\tau) = x(\tau) \star y^*(-\tau) \quad (\text{A4.16})$$

A4.1.6. Canal AWGN

Définition : Un canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise Channel*) est un canal bruité, dont le bruit considéré est un bruit blanc additif gaussien.

Définition d'un bruit blanc additif gaussien (*Additive White Gaussian Noise*) : Le bruit blanc additif gaussien, noté $b(t)$, est un processus aléatoire centré (de moyenne nulle) et stationnaire (qui ne dépend pas du temps) présentant les propriétés suivantes :

Bruit Gaussien : Le processus aléatoire suit une loi gaussienne de paramètres (μ, σ^2) avec $\mu = 0$ et $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ dont sa fonction de densité de probabilité est :

$$p_b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} \quad (\text{A4.17})$$

Bruit Blanc : Il n'y a aucune corrélation entre deux instants différents. En d'autres termes, nous avons :

$$\forall \tau \neq 0 \quad C_b(\tau) = \langle b(t), b(t - \tau) \rangle = 0 \quad (\text{A4.18})$$

De plus, pour $\tau = 0$, nous avons : $C_b(0) = \langle b(t), b(t) \rangle = \frac{N_0}{2} = \sigma^2$

A4.1.7. Énergie et puissance d'un signal

A4.1.7.1. Signal à énergie finie et densité spectrale d'énergie

Relation de Parseval (*Parseval's Relation*) : L'énergie d'un signal est donnée en fonction du temps et en fonction de la fréquence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega \quad (\text{A4.19})$$

❖ **Définition énergie d'un signal (Signal energy) :**

$$E_x = \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) \cdot X(\omega) d\omega \quad (\text{A4.20})$$

Voir démonstration de l'équation (2.34).

Remarques :

- ❖ Le signal $x(t)$ est dit à énergie finie si $E_x \leq +\infty$.
- ❖ Lorsqu'un message passe au travers d'un filtre, celui-ci peut annuler certaines de ses composantes spectrales. Le message subit alors une certaine distorsion et une partie de son énergie est perdue. Le théorème de Parseval permet de déterminer la proportion de l'énergie du signal qui passe au travers du filtre.

❖ **Densité d'énergie spectrale (DSE, Energy Spectral Density ESD) :** La densité d'énergie spectrale $S_{ex}(f)$ représente la répartition d'énergie du signal dans le domaine fréquentiel. Elle concerne les signaux à énergie finie et elle est la transformation de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal :

$$S_{ex}(f) = \mathcal{F}[C_x(\tau)] = |X(f)|^2 \quad (\text{A4.21})$$

A4.1.7.2. Signal de puissance finie (Signal power) et densité spectrale de puissance (Power Spectral Density)

❖ **Définition :**

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (\text{A4.22})$$

Remarque : Le signal $x(t)$ est dit à puissance moyenne finie si $P_x \leq +\infty$. Dans ce cas, on considère $P_x = C_x(0)$

❖ **Densité spectrale de puissance (DSP, Power Spectral Density PSD) :** La densité spectrale de puissance représente la répartition de la puissance du signal dans le domaine fréquentiel. Les signaux sont à puissance moyenne finie :

$$S_{px}(f) = \mathcal{F}[C_x(\tau)] \quad (\text{A4.23})$$

Avec $\mathcal{F}[C_x(\tau)]$ la transformation de Fourier de l'autocorrélation de x , soit :
 $C_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$

Récapitulatif :

- ❖ Si le signal $x(t)$ est à énergie finie, nous avons : $S_{ex}(f) = |X(f)|^2$ (A4.24)
- ❖ Si le signal $x(t)$ est à puissance moyenne finie, nous avons : $S_{px}(f) \neq |X(f)|^2$

Rappelons que le bruit blanc additif gaussien est un signal dont la densité spectrale est uniforme à toutes les fréquences. Elle est donnée par la relation :

$$S_x(f) = \mathcal{F}[C_x(\tau)] = \mathcal{F}[C_x(0)] = \frac{N_0}{2} \quad \forall f \quad \text{(A4.25)}$$

Cela signifie que la densité spectrale de puissance du bruit blanc additif gaussien est uniforme. Elle est constante, quelle que soit la fréquence.

Représentation graphique de la densité spectrale de puissance du bruit blanc (Figure A4.1) :

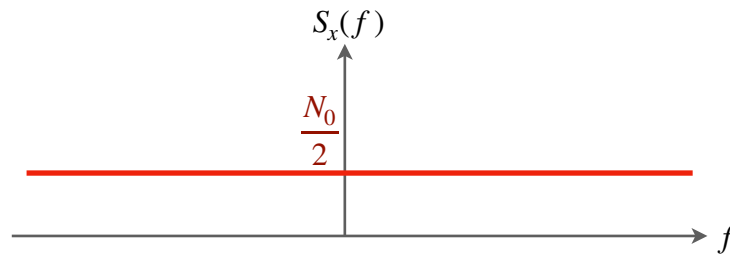


Figure A4.1 : Densité spectrale de puissance du bruit blanc

A4.1.8. Filtre adapté

A4.1.8.1. Caractéristiques d'un filtre

Définition filtre (Filter) : Pour un système dont l'entrée est le signal $x(t)$ et la sortie est le signal $y(t)$, décrit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ (voir Figure A4.2).

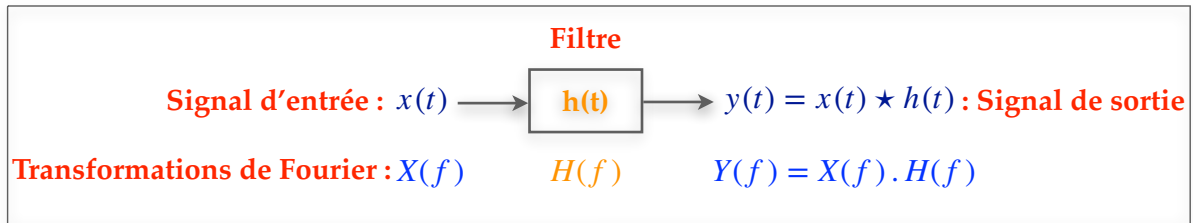


Figure A4.2 : Relations entrée-sortie d'un filtre

Propriété : $S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$ (A4.26)

Avec :

- ❖ $S_y(f)$: la densité spectrale de $y(t)$
- ❖ $S_x(f)$: la densité spectrale de $x(t)$
- ❖ $H(f)$: la transformation de Fourier de $h(t)$

Cette propriété est valide pour les signaux de puissance finie ou d'énergie finie.

Preuve : $S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$

Nous cherchons à calculer la densité spectrale de $y(t)$ définie comme suit :

$$S_y(f) = \mathcal{F} [C_y(\tau)]$$

Avec :

- ❖ $C_y(\tau) = E[y(t)y(t + \tau)]$, l'autocorrélation de $y(t)$
- ❖ $E[y(t)y(t + \tau)]$, la moyenne du produit de $y(t)$ par $y(t + \tau)$

Remarque : La moyenne d'un signal $x(t)$ est donnée par la formule :

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \tag{A4.27}$$

❖ **Exprimons $y(t)$ et $y(t + \tau)$:**

$$\text{❖ } y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) x(t - s) ds \tag{A4.28}$$

$$\text{❖ } y(t + \tau) = x(t + \tau) \star h(t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) x(t + \tau - r) dr \tag{A4.29}$$

❖ **Calculons l'autocorrélation du signal aléatoire $y(t)$:**

$C_y(\tau) = E[y(t)y(t + \tau)] = E[y(t)]E[y(t + \tau)]$ car $y(t)$ et $y(t + \tau)$ sont indépendants (ils ne sont pas corrélés).

❖ **Calculons $E[y(t)]$:**

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)x(t-s) ds \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)x(t-s) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s) dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)E[x(t-s)] ds \\ \text{Car : } \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s) dt &= E[x(t-s)] \end{aligned} \tag{A4.30}$$

❖ **Calculons $E[y(t + \tau)]$:**

$$\begin{aligned} E[y(t + \tau)] &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)x(t + \tau - r) dr \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)x(t + \tau - r) dr dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau - r) dt dr = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E[x(t + \tau - r)] dr \\ \text{Car : } \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau - r) dt &= E[x(t + \tau - r)] \end{aligned} \tag{A4.31}$$

Nous obtenons ainsi, pour le calcul de $C_y(\tau)$:

$$\begin{aligned} C_y(\tau) &= E[y(t)y(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)E[x(t-s)] ds \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E[x(t + \tau - r)] dr \\ \text{Soit : } C_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)E[x(t-s)]E[x(t + \tau - r)] dr ds \end{aligned} \tag{A4.32}$$

Posons : $t' = t - s$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} C_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)E[x(t')]E[x(t' + \tau + s - r)] dr ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)E[x(t')x(t' + \tau + s - r)] dr ds \end{aligned} \tag{A4.33}$$

$$\text{Or : } E[x(t') x(t' + \tau + s - r)] = C_x(\tau + s - r)$$

Ainsi, l'autocorrélation de $y(t)$ est :

$$C_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) h(r) C_x(\tau + s - r) dr ds \quad (\text{A4.34})$$

❖ **Calculons maintenant $S_y(f)$:**

$$S_y(f) = \mathcal{F}[C_y(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) h(r) C_x(\tau + s - r) e^{-2j\pi f\tau} dr ds d\tau \quad (\text{A4.35})$$

Effectuons le changement de variable : $u = \tau + s - r$ et $du = d\tau$

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) h(r) C_x(u) e^{-2j\pi f(u-s+r)} dr ds du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{2j\pi fs} ds \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) e^{-2j\pi fr} dr \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(u) e^{-2j\pi fu} du \end{aligned} \quad (\text{A4.36})$$

C'est-à-dire : $S_y(f) = H(-f) \cdot H(f) \cdot S_x(f)$

$$\text{Car : } \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(u) e^{-2j\pi fu} du = \mathcal{F}[C_x(u)] = S_x(f) \quad (\text{A4.37})$$

De plus : $H(-f) = H^*(f)$, du fait que $h(t)$ est un signal réel.

Ainsi, nous avons bien : $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

A4.1.8.2. Filtre adapté et corrélateur

Définition : Lorsque le signal émis est transmis dans un canal bruité, il va subir des déformations plus ou moins importantes rendant alors sa détection au niveau du récepteur parfois impossible. L'objectif du filtre adapté est de maximiser le rapport signal sur bruit à sa sortie. Voici son principe de fonctionnement :

❖ **Filtre adapté (*Matched filter*) :**

Nous avons le système suivant (voir Figure A4.3) :

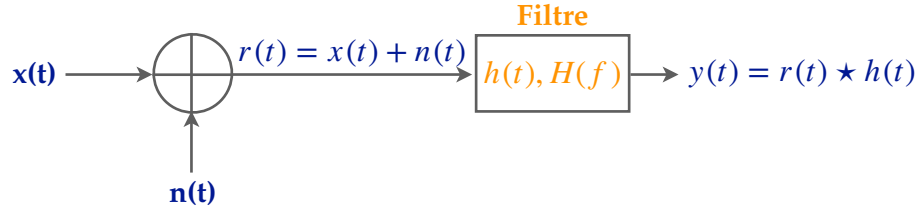


Figure A4.3 : Filtre adapté

Avec :

- ❖ $x(t)$ est le signal émis
- ❖ $n(t)$ est un bruit blanc additif gaussien de variance $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$
- ❖ $r(t) = x(t) + n(t)$ est le signal reçu à l'entrée du récepteur à la sortie du canal AWGN
- ❖ $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre et $H(f)$ sa réponse en fréquence
- ❖ $y(t)$ est le signal à la sortie du filtre adapté défini comme suit et observé au temps T :

$$y(t) = r(t) \star h(t) = [x(t) + n(t)] \star h(t) = x(t) \star h(t) + n(t) \star h(t)$$

Nous posons :

- ❖ $s(t) = x(t) \star h(t)$
- ❖ $b(t) = n(t) \star h(t)$ où $b(t)$ est le bruit de sortie

Le filtre adapté vise à maximiser le rapport signal sur bruit défini comme étant le rapport de la puissance du signal émis en sortie du filtre sur la puissance du bruit.

$$\text{Soit : } \frac{S}{B} = \frac{P_s}{P_b} \quad (\text{A4.38})$$

- ❖ **Calculons la puissance du signal émis en sortie du filtre P_s :**

$$P_s = |s(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f) \cdot H(f) e^{2j\pi ft}|^2 df = C_s(0) \quad (\text{A4.39})$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(f) \cdot H(f) e^{2j\pi ft} \right|^2 df \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (\text{A4.40})$$

Car, en effet : $\left| e^{2j\pi ft} \right| = 1$

$$\text{Soit : } \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H(f) e^{2j\pi ft} \right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)| \cdot \left| e^{2j\pi ft} \right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Rappelons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz stipule :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

Nous déduisons donc en reprenant les formules (A4.39) et (A4.40) :

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(f) \cdot H(f) e^{2j\pi ft} \right|^2 df \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (\text{A4.41})$$

❖ **Calculons maintenant la puissance du bruit P_b en sortie du filtre :**

$$P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} S_b(f) df \quad (\text{A4.42})$$

Avec : $S_b(f)$, la densité spectrale $deb(t)$

Par ailleurs, dans le cas d'un filtre linéaire, nous pouvons appliquer la formule (A4.26) suivante : $S_b(f) = |H(f)|^2 \cdot S_n(f)$

$$\text{C'est-à-dire : } P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} S_b(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) \cdot |H(f)|^2 df \quad (\text{A4.43})$$

Or, $n(t)$ est un bruit blanc additif gaussien de variance $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$. Sa densité spectrale de puissance est égale à $\frac{N_0}{2}$.

$$\text{Nous avons donc : } P_b = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

❖ **D'où le rapport signal sur bruit :**

$$\frac{S}{B} = \frac{P_s}{P_b} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f) \cdot H(f) e^{2j\pi ft}|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \frac{S}{B} \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{A4.44})$$

$$\text{En d'autres termes : } \frac{S}{B} \leq \frac{2}{N_0} E_x \quad (\text{A4.45})$$

$$E_x \text{ représente l'énergie du signal } x(t), \text{ soit : } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$\text{Pour obtenir l'égalité de l'équation (A4.45), il faut } H(f) = k \cdot X^*(f) e^{-2j\pi fT} \quad (\text{A4.46})$$

Avec k , une constante (voir démonstration du théorème de Cauchy-Schwarz).

Dans le cas de signaux réels : $x(t) = x^*(t)$

Les transformations d'amplitude sont des fonctions paires, c'est-à-dire : $X^*(f) = X(-f)$. Le profil du filtre adapté sera :

$$H(f) = k \cdot X(-f) e^{-2j\pi fT} \quad (\text{A4.47})$$

Remarque : La sortie est observée tous les $t = T$. Il y a donc un délai temporel, plus précisément un retard représenté par $e^{-2j\pi fT}$.

Dans le domaine temporel, la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre est alors :

$$h(t) = k \cdot x(T - t) \quad (\text{A4.48})$$

Remarque : Cela signifie que le filtre adapté a la même forme que le signal $x(-t)$. Dans la pratique, nous utilisons un corrélateur.

❖ **Corrélateur** : Montrons qu'un filtre adapté peut être réalisé par le biais d'un corrélateur.

Soit : $r(t) = x(t) + n(t)$, le signal d'entrée avec $x(t)$, le signal émis et $n(t)$ un bruit blanc additif gaussien.

Soit : $h(t)$, la réponse impulsionnelle du corrélateur.

Nous avons donc en sortie : $y(t) = r(t) \star h(t)$

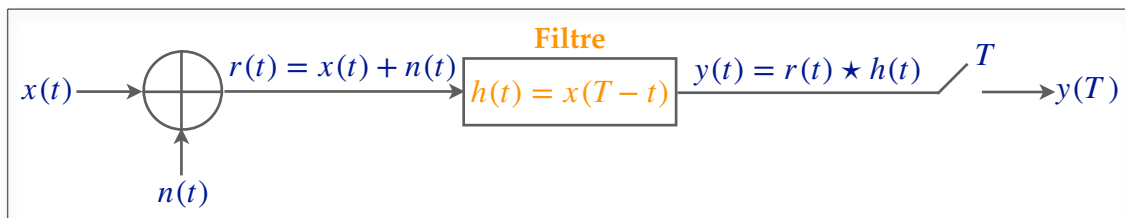
$$\text{C'est-à-dire : } y(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

En posant : $h(t) = x(T - t)$

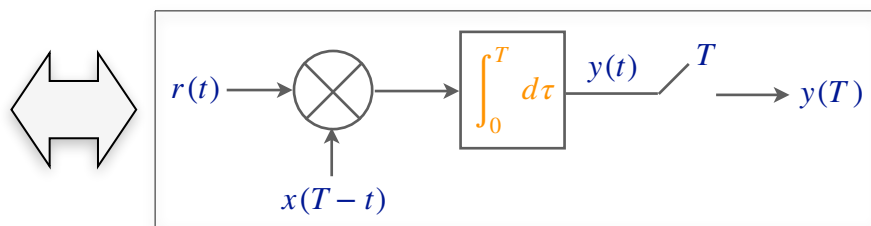
$$\text{Nous obtenons : } y(t) = \int_0^t r(\tau)x(T - (t - \tau)) d\tau \quad (\text{A4.49})$$

$$\text{À l'instant } t = T, \text{ nous déduisons que : } y(T) = \int_0^T r(\tau)x(\tau) d\tau = r(T) \star h(T) \quad (\text{A4.50})$$

Un corrélateur réalise donc bien un filtre adapté. Les systèmes d'équivalence entre le filtre adapté et le corrélateur sont montrés à la Figure A4.4 :



FILTRE ADAPTÉ



CORRÉLATEUR

Figure A4.4 : Équivalence filtre adapté et corrélateur

A4.1.9. Spectre d'une séquence binaire aléatoire

A4.1.9.1. Signal binaire NRZ

Étudions le spectre d'une impulsion d'un signal NRZ représentée à la Figure A4.5 :

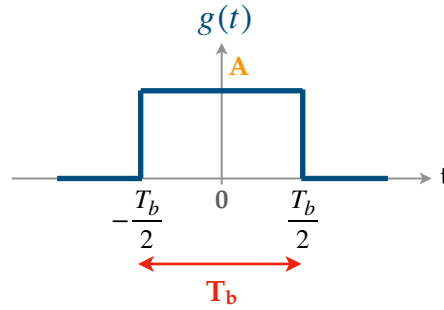


Figure A4.5 : Impulsion d'un signal NRZ

❖ Calculons la densité spectrale de puissance du signal $g(t)$: $S_g(f)$

$$S_g(f) = |G(f)|^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2j\pi ft} dt \right)^2 \quad (\text{A4.51})$$

$$\text{Soit : } S_g(f) = \left(\int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} A e^{-2j\pi ft} dt \right)^2$$

$$\text{C'est-à-dire : } S_g(f) = \left(A \left[\frac{e^{-2j\pi ft}}{-2j\pi f} \right]_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} \right)^2 = \left(A \frac{e^{j\pi f T_b} - e^{-j\pi f T_b}}{2j\pi f} \right)^2 \quad (\text{A4.52})$$

$$\text{Soit : } S_g(f) = A^2 T_b^2 \text{sinc}^2(f T_b) \quad (\text{A4.53})$$

Remarque : La fonction $sa(\cdot)$ désigne la fonction d'échantillonnage (*sampling function*)

$$\text{avec, par exemple : } sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

Graphiquement, le spectre d'une impulsion NRZ a l'allure représentée à la Figure A4.6 :

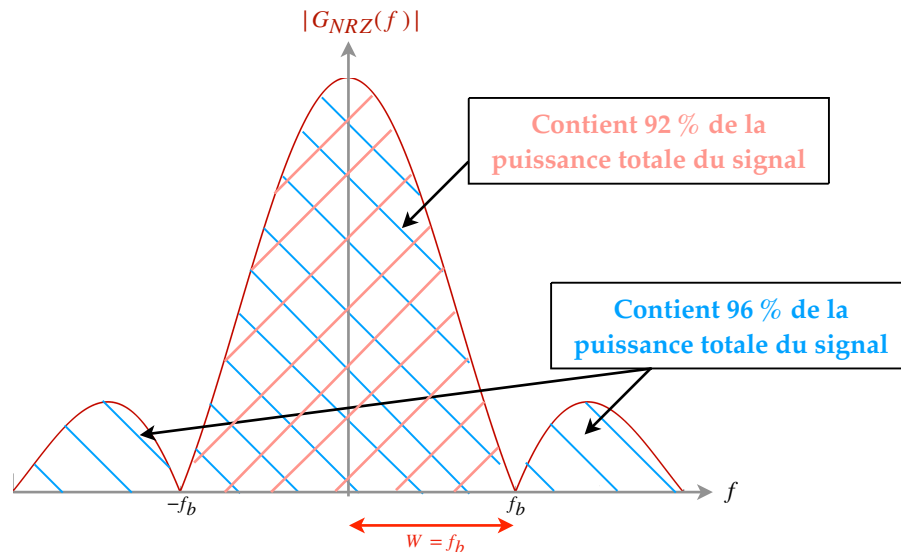


Figure A4.6 : Spectre d'un signal NRZ

Remarques :

- ❖ $\int_{-f_b}^{f_b} S_{NRZ}(f) df = 92 \% \text{ de } S_{NRZ}(f)$
- ❖ $\int_{-2f_b}^{2f_b} S_{NRZ}(f) df = 96 \% \text{ de } S_{NRZ}(f)$

Les démonstrations peuvent être vérifiées par simulation.

A4.1.9.2. Spectre d'une séquence binaire aléatoire

Définition d'un signal aléatoire (Random signal) : Un signal aléatoire est un signal binaire dont la valeur de chaque bit est indépendante des bits précédents.

Spectre d'une séquence binaire aléatoire : Étudions maintenant le spectre d'une séquence binaire aléatoire et prenons plus particulièrement le cas d'une séquence binaire aléatoire NRZ de niveaux de tension $\pm A$ et de période T_b . Nous supposons également que les bits 1 et 0 sont équiprobables et indépendants, c'est-à-dire non corrélés.

Afin de calculer le spectre d'une telle séquence, appuyons-nous sur l'exemple représenté graphiquement à la Figure A4.7.a :

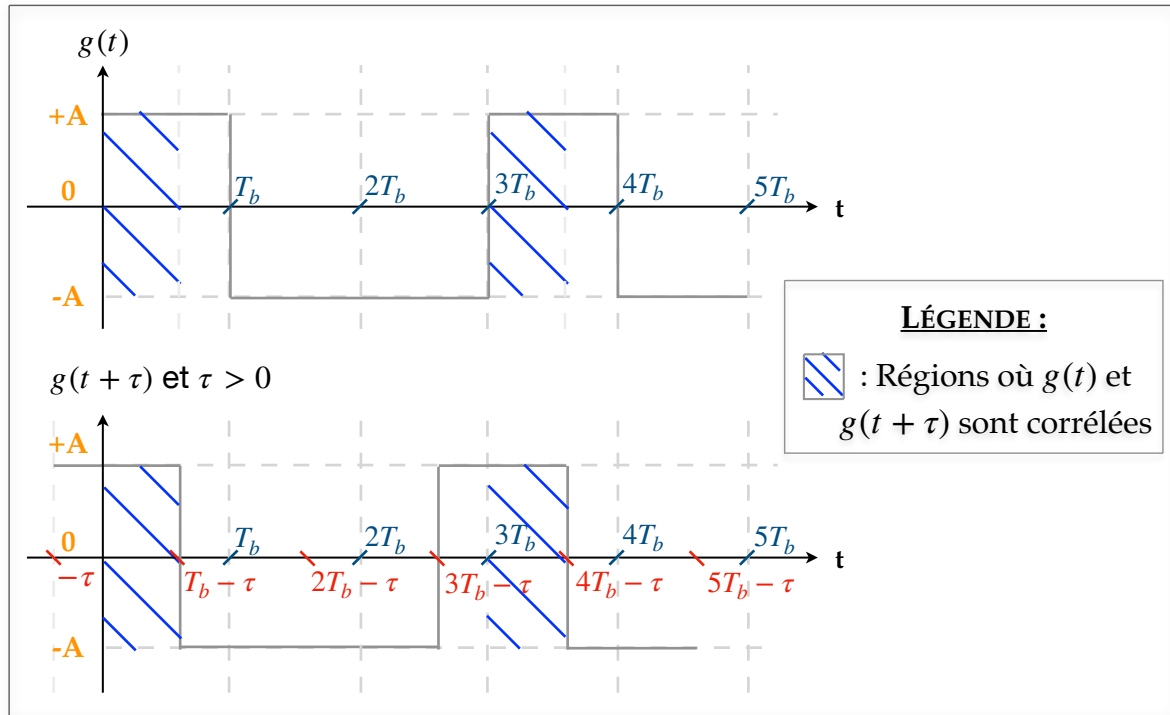


Figure A4.7.a : Séquence binaire aléatoire NRZ avec τ positif

Pour rappel, la densité spectrale de puissance est donnée par la relation :

$$S_g(f) = \mathcal{F}[C_g(\tau)]$$

C'est-à-dire la transformation de Fourier de l'autocorrélation $C_g(\tau)$ de $g(t)$, soit, $C_g(\tau) = \langle g(t), g(t + \tau) \rangle = E[g(t) \cdot g(t + \tau)]$, où E désigne l'espérance (la moyenne pondérée).

Aussi, calculons l'autocorrélation de la séquence binaire aléatoire $g(t)$:

$$C_g(\tau) = \frac{1}{T_b} \int_{-T_b/2}^{T_b/2} g(t) g(t + \tau) dt \quad (\text{A4.54})$$

Distinguons les trois cas suivants :

❖ **Premier cas : $\tau = 0$**

$$C_g(0) = \frac{1}{T_b} \int_{-T_b/2}^{T_b/2} A^2 dt = A^2 \quad (\text{A4.55})$$

❖ **Deuxième cas :** $|\tau| > T_b$

$C_g(\tau) = E [g(t) \cdot g(t + \tau)] = E [g(t)] E [g(t + \tau)]$, car les bits sont aléatoires et non corrélés.

De plus : $E [g(t)] = 0$, car les niveaux de tension A et -A sont équiprobables.

Ainsi, nous avons : $C_g(\tau) = 0$ (A4.56)

❖ **Troisième cas :** $|\tau| < T_b$

Enfin dans ce dernier cas d'étude, représenté à la Figure A4.7.a, l'autocorrélation de $g(t)$ pour $\tau > 0$ est la suivante :

Conformément à la Figure A4.7.a : $C_g(\tau) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b-\tau} A^2 dt = A^2 \frac{T_b - \tau}{T_b}$ (A4.57)

Aussi, nous pouvons de la même manière mettre en évidence l'autocorrélation de $g(t)$ pour τ négatif, comme représenté à la Figure A4.7.b.

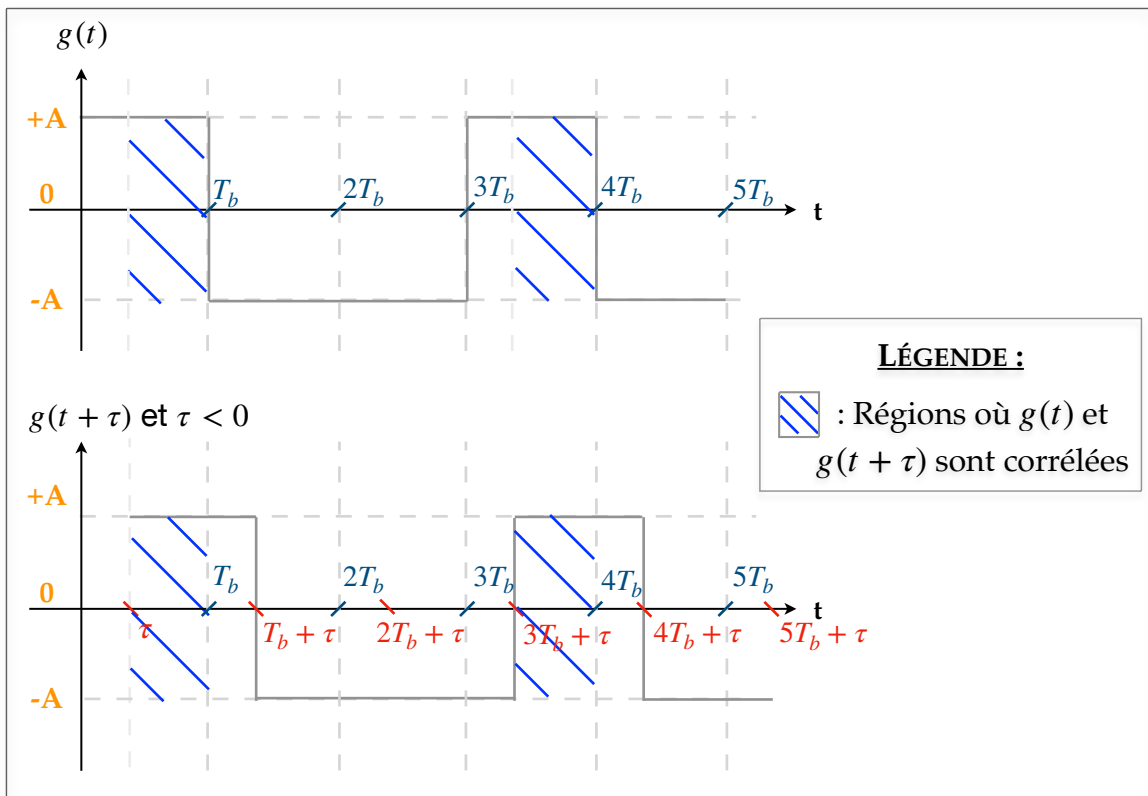


Figure A4.7.b : Séquence binaire aléatoire NRZ avec τ négatif

Conformément à la Figure A.7.b : $C_g(\tau) = \frac{1}{T_b} \int_{\tau}^{T_b} A^2 dt = A^2 \frac{T_b - \tau}{T_b}$

Soit pour $|\tau| < T_b$, l'autocorrélation de $g(t)$ est : $C_g(\tau) = A^2 \frac{T_b - |\tau|}{T_b}$

Aussi, en reprenant les formules (A4.56) à (A4.57), l'autocorrélation d'une séquence binaire aléatoire est :

$$C_g(\tau) = \begin{cases} A^2 \frac{T_b - |\tau|}{T_b} & \text{si } |\tau| < T_b \\ 0 & \text{si } |\tau| > T_b \end{cases} \quad (\text{A4.58})$$

Représentation graphique de l'autocorrélation d'une séquence binaire aléatoire (Figure A4.8) :

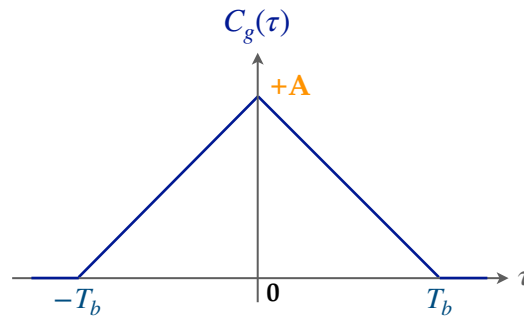


Figure A4.8 : Autocorrélation d'une séquence binaire aléatoire

Calculons maintenant la densité spectrale d'une séquence aléatoire binaire :

$$S_g(f) = \mathcal{F}[C_g(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C_g(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} C_g(\tau) (\cos(2\pi f\tau) - j \sin(2\pi f\tau)) d\tau$$

Or, la fonction $C_g(\tau)$ est paire et, d'après les propriétés de la transformation de Fourier, $\mathcal{F}[C_g(\tau)]$ est également paire. Il s'ensuit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_g(\tau) \sin(2\pi f\tau) d\tau = 0 \quad (\text{A4.59})$$

$$\text{Et : } S_g(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_g(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$$

Et plus particulièrement : $S_g(f) = \int_{-T_b}^{+T_b} \frac{A^2}{T_b} (T_b - |\tau|) \cos(2\pi f\tau) d\tau$

$$\text{Soit : } S_g(f) = \frac{A^2}{T_b} \left[\int_{-T_b}^0 (T_b + \tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau + \int_0^{+T_b} (T_b - \tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \right] \quad (\text{A4.60})$$

La parité de $C_g(\tau)$ permet de simplifier le calcul de la densité spectrale de puissance comme suit : $S_g(f) = 2 \times \frac{A^2}{T_b} \left[\int_0^{+T_b} (T_b - \tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \right]$ (A4.61)

Afin de résoudre la formule (A4.61), appliquons la méthode de l'intégration par parties.

Rappel : $\int u' \cdot v = [u \cdot v] - \int u \cdot v'$ avec u' et v' les dérivées respectives de u et v .

$$\text{Posons : } \begin{cases} u' = \cos(2\pi f\tau) \\ v = T_b - \tau \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} u = \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f} \\ v' = -1 \end{cases} \quad (\text{A4.62})$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } S_g(f) &= 2 \times \frac{A^2}{T_b} \left(\left[(T_b - \tau) \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f} \right]_0^{T_b} + \int_0^{T_b} \frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f} d\tau \right) \\ &= 2 \times \frac{A^2}{T_b} \left(0 + \frac{1}{2\pi f} \int_0^{T_b} \sin(2\pi f\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{2A^2}{T_b} \times \frac{1}{2\pi f} \left(\left[-\frac{\cos(2\pi f\tau)}{2\pi f} \right]_0^{T_b} \right) = \frac{2A^2}{T_b} \times \frac{1}{4\pi^2 f^2} [1 - \cos(2\pi f T_b)] \end{aligned} \quad (\text{A4.63})$$

En nous basant sur la relation $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a)$, nous obtenons :

$$S_g(f) = \frac{2A^2}{T_b} \times \frac{1}{4\pi^2 f^2} \times 2 \sin^2(\pi f T_b) \quad (\text{A4.64})$$

$$\text{Soit : } S_g(f) = A^2 T_b \times \frac{\sin^2(\pi f T_b)}{\pi^2 f^2 T_b^2} = A^2 T_b \operatorname{sinc}^2(\pi f T_b) \quad (\text{A4.65})$$

Ainsi, la densité spectrale de puissance d'une séquence aléatoire binaire est :

$$S_g(f) = A^2 T_b \operatorname{sinc}^2 (f T_b) = A^2 T_b \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T_b}{2} \right) \quad (\text{A4.66})$$

Représentation graphique de la densité spectrale de puissance d'une séquence binaire aléatoire (Figure A4.9) :

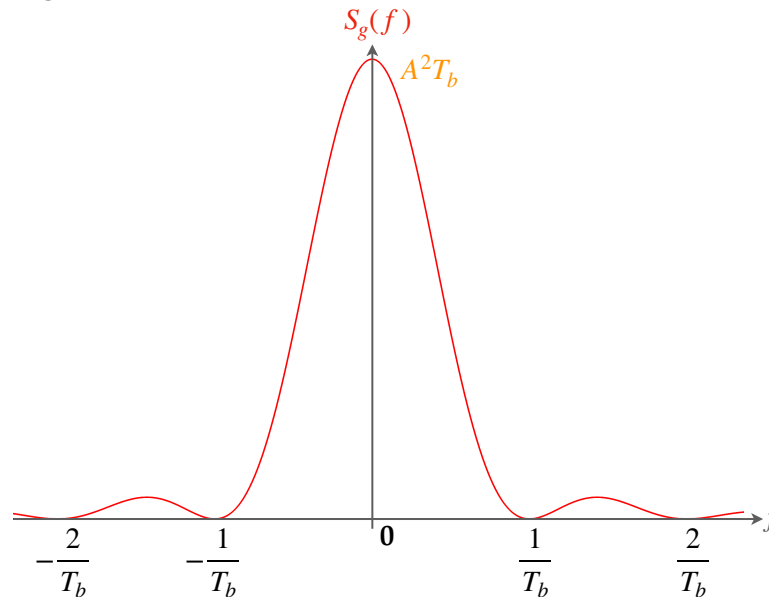


Figure A4.9 : Densité spectrale de puissance d'une séquence binaire aléatoire

A4.1.10. Interférences inter-symboles et diagramme de l'oeil

❖ **Définition des interférences inter-symboles (IES) (Intersymbol interference (ISI))**

: Les interférences inter-symboles sont causées au niveau du récepteur par le chevauchement des formes d'ondes émises successivement au rythme T_s . Rappelons qu'en prenant un filtre passe-bas, une onde carrée est «arrondie» et déborde sur les bits voisins (voir premier critère de Nyquist, section A4.1.11.1.). L'observation réalisée à l'instant kT_s ne reflète pas uniquement le symbole émis à cet instant, mais plutôt le cumul de symboles transmis à d'autres instants. Ces autres symboles voisins vont agir comme du bruit, provoquant ainsi une distorsion à la réception du signal binaire émis à l'instant kT_s . Les interférences inter-symboles sont donc néfastes pour la qualité de la communication et peuvent augmenter considérablement la probabilité d'erreur. Ce phénomène survient généralement en cas d'erreur de synchronisation au niveau du récepteur.

❖ **Diagramme de l'oeil (Eye diagram or Eye pattern) :** Le diagramme de l'oeil est un outil permettant de juger de la qualité d'une transmission obtenue à l'aide d'un oscilloscope à rémanence. Pour ce faire, il suffit de calibrer l'oscilloscope sur une période de T_s afin de visualiser le signal reçu avant l'échantillonnage. Cette visualisation est obtenue en branchant le signal binaire à l'entrée verticale de l'oscilloscope et en connectant l'horloge du signal binaire à l'entrée de synchronisation externe de l'oscilloscope.

Représentation graphique du diagramme de l'oeil (Figure A4.10):

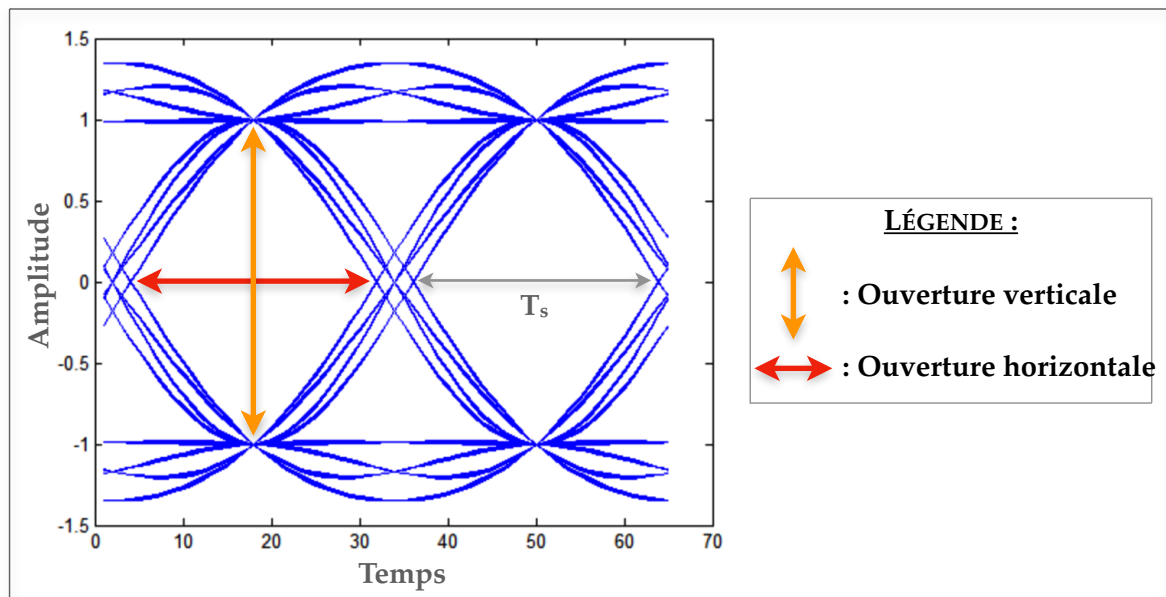


Figure A4.10 : Diagramme de l'oeil

Remarque : Comme nous pouvons l'observer à la Figure A4.10, tous les bits successifs se superposent et restent ainsi visibles sur l'écran d'un oscilloscope. Notons que les transitions d'une valeur de bit à l'autre ne sont pas toujours synchronisées.

❖ **Ouverture verticale :** permet de visualiser la distance qui sépare les niveaux 1 et 0, distance qui peut être rétrécie par les bruits additifs externes. L'ouverture de l'oeil aux instants d'échantillonnage doit être maximale afin de mieux séparer les niveaux reçus pour les bits 1 et 0. En l'absence d'IES (ISI), l'œil est complètement ouvert. Par ailleurs, plus l'ouverture verticale de l'œil diminue plus la probabilité d'erreur augmente (voir Figure A4.11).

❖ **Ouverture horizontale** : représente l'immunité au déphasage d'horloge. En d'autres termes, l'ouverture horizontale maximale de l'œil correspond au temps d'échantillonnage idéal. Cette ouverture donne une indication sur l'écart tolérable entre les temps d'échantillonnage réel et idéal. Plus il y a de décalage entre ces deux temps, moins le symbole émis est correctement récupéré. La reconstitution d'une horloge se re-synchronise à chaque transition des bits reçus. Si ces transitions ne sont pas synchronisées ou s'il manque des transitions de niveau dans le signal transmis, l'horloge reconstituée n'est pas stable. Ce phénomène s'appelle la **gigue**. Une plus grande ouverture horizontale de l'œil assure des transitions de bits plus rapides (voir Figure A4.11).

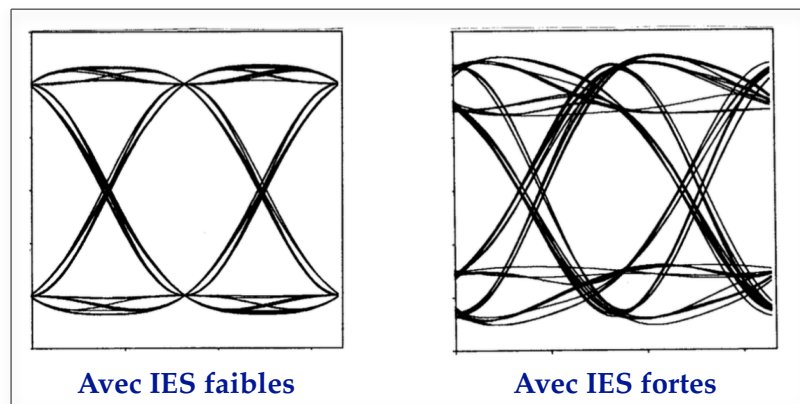


Figure A4.11 : Diagramme de l'œil avec IES faibles et fortes

A4.1.11. Filtre de Nyquist

Filtre de Nyquist (Nyquist Filter) : En communication numérique, nous limitons la bande passante au moyen d'un filtre passe-bas. Dans ce qui suit, nous allons montrer qu'une impulsion passant par un filtre passe-bas en ressort « arrondie ». Le filtre de Nyquist vise à répondre à la problématique suivante : Comment réduire intelligemment la bande passante d'une séquence binaire tout en l'identifiant exactement ?

La réponse est donnée par la formule $W = \frac{f_b}{2} (1 + \alpha)$, où f_b est la bande passante de la séquence originelle (séquence binaire NRZ) et α est un facteur qui va dépendre de la pente du filtre de Nyquist qui a un profil de type cosinus surélevé (*Raised-cosine filter*).

Ce filtre est conçu en tenant compte de trois critères :

❖ **Premier critère** : Choisir la fréquence de coupure f_c du filtre passe-bas idéal de façon à éviter l'interférence entre bits successifs. Nous verrons qu'un filtre dont la fréquence de coupure est égale à $\frac{f_b}{2}$ répond à ce critère.

❖ **Deuxième critère** : Choisir un profil de filtre comme la lecture des bits à des instants d'échantillonnage donnés soit très peu affectée par les bits consécutifs. Ceci est obtenu au moyen d'un profil de type cosinus surélevé.

❖ **Troisième critère** : Le filtre déforme le spectre de la séquence binaire aléatoire selon une fonction $sa(.)$ de la fréquence et nous adjoignons un égalisateur, soit l'inverse de cette même fonction $sa(.)$ de la fréquence pour annuler cette déformation.

A4.1.11.1. Premier critère

Premier critère : Idéalement, la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas devrait être :

$$f_c = \frac{f_b}{2} = \frac{1}{2T_b} \quad (\text{A4.67})$$

Avec :

- ❖ f_c : la fréquence de coupure du filtre (en Hz)
- ❖ f_b : la fréquence d'un bit (en Hz)

Cette première condition permet d'éliminer les interférences inter-symboles au niveau du récepteur. Pour s'en convaincre, il suffit de montrer qu'une impulsion carrée qui passe dans un filtre passe-bas est arrondie. Aussi, faisons passer un signal à échantillonnage naturel dans un filtre passe-bas.

Soit le signal $g(t)$ échantillonné au rythme de Nyquist à la fréquence d'échantillonnage $f_s \geq 2f_{MAX}$:

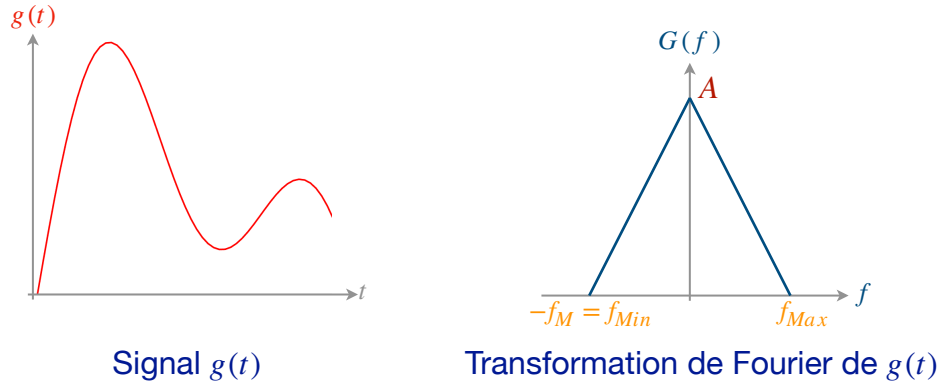


Figure A4.12.a

Le spectre du signal échantillonné par un train d'impulsions de Dirac $g_s(t)$, espacées de T_s , noté $G_s(\omega)$ (échantillonnage idéal), est représenté à la Figure A4.12 ci-après :

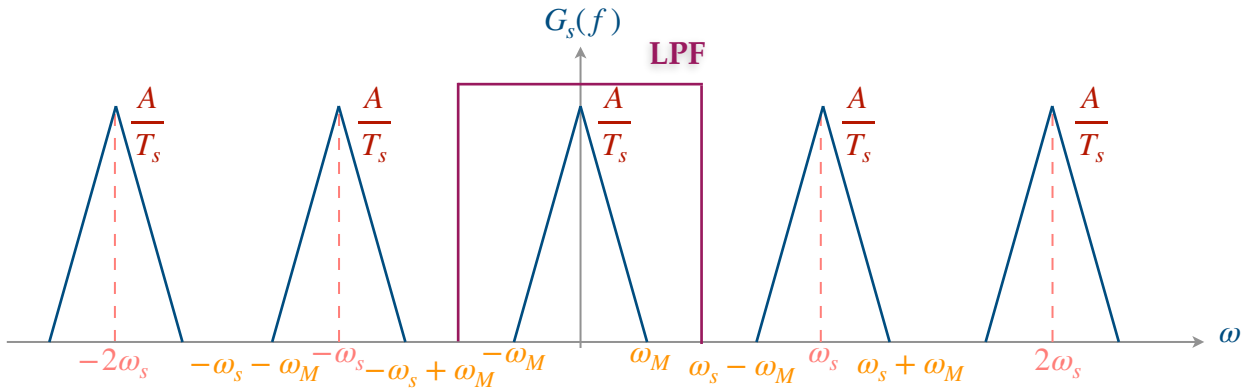


Figure A4.12.a et b : Spectre d'un échantillonnage idéal, $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

Le signal $G_s(\omega)$ étant périodique, nous pouvons le décomposer en série de Fourier dans le domaine fréquentiel.

$$G_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2j\pi k\omega}{\omega_s}} \tag{A4.68}$$

$$\text{Avec : } c_k = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} G_s(\omega) e^{-\frac{2j\pi k\omega}{\omega_s}} d\omega \tag{A4.69}$$

❖ **Calculons les composantes c_k :**

$$c_k = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} G_s(\omega) e^{-\frac{2j\pi k\omega}{\omega_s}} d\omega = \frac{2\pi}{\omega_s} \times \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} G(\omega) e^{-jk \cdot \frac{2\pi\omega}{\omega_s}} d\omega \tag{A4.70}$$

$$\text{Or : } \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} G(\omega) e^{-jk \cdot \frac{2\pi\omega}{\omega_s}} d\omega = g\left(\frac{-2\pi k}{\omega_s}\right) \quad (\text{A4.71})$$

Car : $g(t) = 2\pi G(-\omega)$ par dualité

Remarque : $\frac{-k2\pi}{\omega_s}$ joue le rôle du temps t dans le référentiel de la transformation de

Fourier. Nous retrouvons ainsi la transformation inverse du signal $g(t)$.

$$\text{Nous obtenons alors : } c_k = \frac{2\pi}{\omega_s} g\left(\frac{-2\pi k}{\omega_s}\right) \quad (\text{A4.72})$$

❖ **Déterminons maintenant $g(t)$:**

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1} [G_s(\omega)] = \int_{-W}^W \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{\omega_s} g\left(\frac{-2\pi k}{\omega_s}\right) e^{\frac{2j\pi k\omega}{\omega_s}} e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A4.73})$$

$$\text{C'est-à-dire : } g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{\omega_s} g\left(\frac{2\pi k}{\omega_s}\right) \int_{-W}^W e^{j\omega\left(t - \frac{2k\pi}{\omega_s}\right)} d\omega \quad (\text{A4.74})$$

$$\text{Or : } \int_{-W}^W e^{j\omega\left(t - \frac{2k\pi}{\omega_s}\right)} d\omega = \left[\frac{e^{j\omega\left(t - \frac{2k\pi}{\omega_s}\right)}}{j\left(t - \frac{2k\pi}{\omega_s}\right)} \right]_{-W}^W = 2 \frac{\sin\left(W\left(t - \frac{2k\pi}{\omega_s}\right)\right)}{\left(t - \frac{2k\pi}{\omega_s}\right)} \quad (\text{A4.75})$$

$$\text{Soit : } g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot 2\pi W}{\omega_s} g\left(\frac{2\pi k}{\omega_s}\right) \times sa\left(2\pi W\left(t - \frac{2k\pi}{\omega_s}\right)\right) \quad (\text{A4.76})$$

$$\text{Posons : } \boxed{W_{radian} = 2\pi W} \quad (\text{A4.77})$$

La formule (A4.76) devient alors :

$$\boxed{g(t) = \frac{2W_{radian}}{\omega_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{2\pi k}{\omega_s}\right) \times sa\left(W_{radian}\left(t - \frac{2k\pi}{\omega_s}\right)\right)} \quad (\text{A4.78})$$

$$\text{De plus : } \omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Soit :

$$g(t) = \frac{W_{radian} T_s}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT_s) \times sa\left(W_{radian}(t - kT_s)\right) \quad (\text{A4.79})$$

Aussi, pour que les bits adjacents n'interfèrent pas avec le signal d'instant T_s , il faut que les queues des signaux adjacents soient au niveau du maximum du signal d'instant T_s . En d'autres termes, il s'agit des moments où la fonction d'échantillonnage $sa(\cdot)$ s'annule, c'est-à-dire à la valeur de π . Nous devons donc avoir :

$$\text{Pour : } t = 0 : T_s = \frac{\pi}{W_{radian}} \quad (\text{A4.80})$$

$$\text{C'est-à-dire : } W = \frac{f_s}{2} \quad (\text{A4.81})$$

$$\text{Soit : } f_c = \frac{f_s}{2} \quad (\text{A4.82})$$

Dans le cas d'un bit de période T_b , la formule (A4.83) devient : $f_c = \frac{1}{2T_b} = \frac{f_b}{2}$

En effet, pour une séquence aléatoire d'impulsion de Dirac de période T_b , le signal de sortie aux temps kT_b d'un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure est f_c est préservée.

En utilisant la formule (A4.80), nous pouvons réécrire la formule (A4.79) sous la forme suivante :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT_s) \times sa\left(\frac{\pi}{T_s}(t - kT_s)\right) \quad (\text{A4.83})$$

Graphiquement, la Figure A4.13 suivante représente le premier critère de Nyquist :

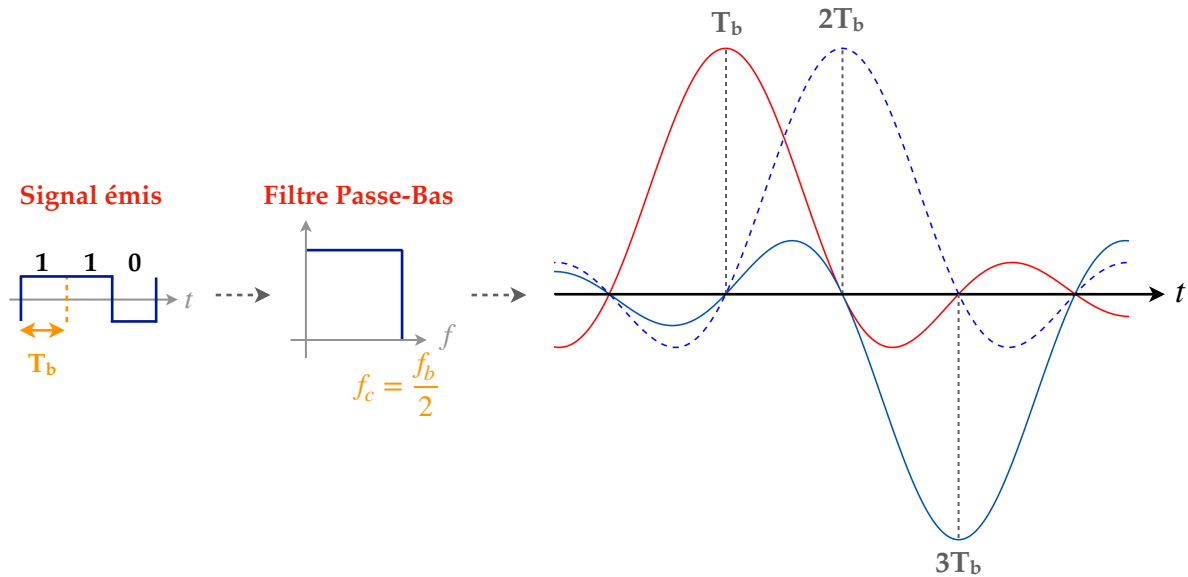


Figure A4.13 : Passage des signaux dans un filtre passe-bas

Le choix $f_c = \frac{f_b}{2}$ permet au moment de l'échantillonnage d'isoler un échantillon particulier kT_b en dépit des « queues » des bits voisins, car tous les autres sinus cardinaux prennent la valeur zéro au moment jT_b où $j \neq k$. Par conséquent, il n'y a plus d'interférences inter-symboles.

A4.1.11.2. Deuxième critère

Deuxième critère : Le deuxième critère de Nyquist repose sur l'utilisation d'un filtre de type cosinus surélevé de paramètre α (voir Figure A4.14). Ce dernier permet de retrouver l'information transmise aux temps kT_b , et ce, malgré l'accumulations des « queues » des bits subséquents. Un filtre de profil cosinus surélevé répond le mieux à ce critère.

Ainsi, il faudrait avoir :
$$W = \frac{f_b}{2} (1 + \alpha) \quad (\text{A4.84})$$

Avec :

❖ $W = \frac{f_c}{2}$ et f_c : la fréquence de coupure du filtre

❖ α : le facteur d'arrondi (*Roll off factor*) prend des valeurs comprises entre 0 et 1. α forme le profil du filtre ; il est idéalement proche de 0, bien qu'en pratique on réalise des filtres avec $\alpha = 0.2$ à $\alpha = 0.3$. Pour des valeurs de α très petites, $\sin(\alpha) \simeq \alpha$ et $\cos(\alpha) \simeq \sqrt{1 - \alpha^2}$ et donc les queues des signaux adjacents sont minimisées aux temps d'échantillonnage.

Représentation graphique du filtre en cosinus surélevé en fonction du facteur d'arrondi α (Figure A4.14) :

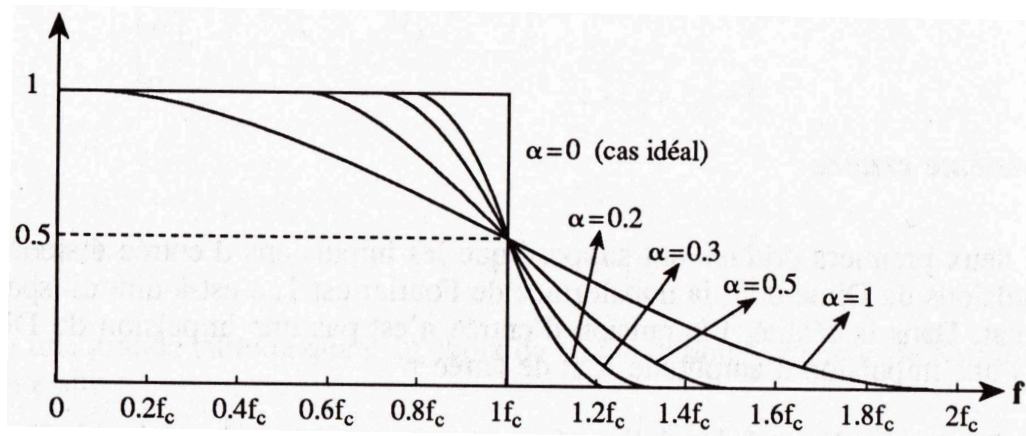


Figure A4.14 : Filtre en cosinus surélevé en fonction du facteur d'arrondi α

Pour répondre au problème des « queues additives » des impulsions adjacentes sur l'impulsion considérée, il est utile de passer par un filtre dont la réponse impulsionnelle ait des valeurs nulles qui coïncident avec celles du signal d'entrée. La réponse en fréquence du filtre, dont le profil est un cosinus surélevé (*Raised Cosine Filter*), peut être formulée comme suit :

$F_{RC}(\omega) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi \omega}{\omega_c} \right) \right)$ répond à ce critère, car $F_{RC}(\omega)$

se traduit par la réponse impulsionnelle :

$$f_{rc}(t) = \frac{\sin \left(\frac{\pi t}{T_b} \right)}{\frac{\pi t}{T_b}} \times \frac{\cos \left(\frac{\alpha \pi t}{T_b} \right)}{1 - \left(\frac{2\alpha \pi t}{T_b} \right)^2} \quad (\text{A4.85})$$

Notons que les queues des bits adjacents ($t = kT_b$) sont atténuées aux temps d'échantillonnage mT_b avec $m \neq k$.

En effet, en reprenant la formule (A4.89), nous avons à l'instant $t = kT_b$:

$$\begin{aligned} f_{rc}(kT_b) &\simeq \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} \times \frac{\sqrt{1 - (\alpha\pi k)^2}}{1 - (2\alpha\pi k)^2} \simeq \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} \times \frac{1 - 2\alpha\pi k}{1 - (2\alpha\pi k)^2} \\ &\simeq \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} \times \frac{1}{1 + 2\alpha\pi k} \end{aligned}$$

À proximité de kT_b , ce rapport sera faible, car $\frac{1}{1 + 2\alpha\pi k} \ll 1$.

Plus exactement, la réponse en fréquence du filtre s'annule à la fréquence $f_c + f_x$, $f_x = \alpha f_c$, la réponse en fréquence du filtre peut être reformulée comme suit :

$$F_{rc}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\omega| < \omega_c - \omega_x \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi(\omega - \omega_c + \omega_x)}{2\omega_x}\right) \right] & \text{pour } \omega_c - \omega_x < |\omega| < \omega_c + \omega_x \\ 0 & \text{pour } |\omega| > \omega_c + \omega_x \end{cases}$$

A4.1.11.3. Troisième critère

Troisième critère : Ajout d'un égalisateur.

L'égalisateur, adaptatif, représente l'inverse de la réponse en fréquence du filtre (voir Figure A4.15). Il permet de corriger les distorsions en fonction de la fréquence causées par le filtre.

Les deux premiers critères présupposent un spectre de fréquence constant à l'entrée. Or, celle-ci est une séquence aléatoire de bits qui a un spectre de fréquence de type $sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, car en pratique l'échantillonnage est uniforme (convertisseur analogique/numérique) et non pas naturel. Il faudra donc mettre en cascade un second filtre de type $\frac{1}{sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$ à l'intérieur de la bande passante de Nyquist.

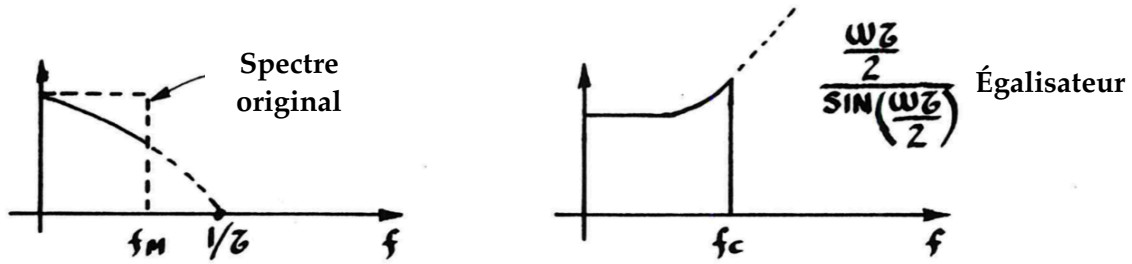


Figure A4.15 : Principe de fonctionnement de l'égalisateur

Remarque : Le filtre de Nyquist est également réalisable avec des symboles multi-niveaux, chaque symbole représentant un certain nombre de bits. Dans ce cas, la fréquence binaire f_b est remplacée par la fréquence symbole f_s et la bande passante du filtre de Nyquist devient :

$$W = \frac{f_s}{2} (1 + \alpha) \quad (\text{A4.86})$$

A4.2. Décomposition en valeurs singulières

❖ Valeur propre :

La valeur propre λ d'une matrice A vérifie l'équation suivante, dite équation caractéristique de la matrice A :

$$\det(A - \lambda I_d) = 0 \quad (\text{A4.87})$$

I_d est la matrice identité et $\det(A - \lambda I_d)$ le déterminant de la matrice $A - \lambda I_d$.

Pour rappel, le déterminant d'une matrice carrée A de dimension $n \times n$, $\det(A)$ ou $|A|$, se calcule à partir de la matrice mineure M_{ij} . La matrice mineure est le déterminant de la matrice obtenue par l'élimination, dans la matrice A , de la rangée i et de la colonne j . Le terme $\rho_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ est le cofacteur de l'élément a_{ij} :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \rho_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A4.88})$$

$$\text{Où : } \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \rho_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A4.89})$$

Exemple A4.1 :

Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont :

$$\det(A - \lambda I_d) = \det \begin{pmatrix} -5 - \lambda & 3 \\ -6 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (-5 - \lambda) \times (4 - \lambda) - 3 \times (-6) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$\det(A - \lambda I_d) = 0$ quand $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Autrement dit, les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$.

❖ Vecteur propre :

Les vecteurs propres $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ vérifient l'équation :

$$AX = \lambda X, \text{ c'est-à-dire } (A - \lambda I_d)X = 0 \quad (\text{A4.90})$$

Pour une matrice A de dimension 2×2 , les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ vérifient : $(A - \lambda_1 I_d) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(A - \lambda_2 I_d) \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple A4.2 :

Reprenons l'exemple A4.1 et calculons les vecteurs propres associés aux valeurs propres : $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$.

❖ Pour : $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} -5 - \lambda_1 & 3 \\ -6 & 4 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} -5 + 2 & 3 \\ -6 & 4 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} -3x_{11} + 3x_{21} = 0 \\ -6x_{11} + 6x_{21} = 0 \end{cases} \implies x_{11} = x_{21}$$

Prenons, par exemple, le vecteur propre $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur proportionnel à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est acceptable.

❖ Pour : $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -5 - \lambda_2 & 3 \\ -6 & 4 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} -6x_{12} + 3x_{22} = 0 \\ -6x_{12} + 3x_{22} = 0 \end{cases} \implies x_{12} = \frac{1}{2}x_{22}$$

Prenons, par exemple, le vecteur propre $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur proportionnel à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est acceptable.

Si les valeurs propres de la matrice A sont distinctes, nous définissons par M la matrice formée par les vecteurs propres de la matrice A . La transformation de similarité permet d'écrire :

$$D = M^{-1}AM \quad (\text{A4.91})$$

Avec :

❖ D : une matrice diagonale formée par les valeurs propres de la matrice A

❖ M^{-1} : la matrice inverse de M , donnée par la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{com}M^T$,

où $\text{com}M^T$ est la transposée de la comatrice de M . La comatrice de M étant formée par ses cofacteurs ρ_{ij} .

Pour rappel, la matrice adjointe d'une matrice carrée A est notée $\text{adj}(A)$; pour l'obtenir, on remplace chaque élément par son cofacteur et on prend le transposé de la matrice obtenue. Les éléments de $\text{adj}(A)$ seront donc ρ_{ij} avec $i, j = 1, 2, \dots, n$. L'inverse d'une matrice A existe lorsque $\det(A) \neq 0$ et est dénoté A^{-1} . On peut le calculer comme suit :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{\left(\rho_{ij}\right)^T}{\det(A)} \quad (\text{A4.92})$$

Où $(\rho_{ij})^T$ est la transposée des cofacteurs ρ_{ij} .

Ainsi, pour la matrice M comme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si $\det(M) \neq 0$, la matrice M est inversible et nous avons :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{com}M^T = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple A4.3 :

Reprenons les valeurs des exemples A4.1 et A4.2 et déterminons la matrice $D = M^{-1}AM$.

❖ La matrice M composée des vecteurs propres est : $M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

❖ La matrice $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{com}M^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

D'où la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

❖ Valeurs singulières :

Les valeurs singulières σ d'une matrice A vérifient l'équation :

$$\det(A^T A - \sigma^2 I_d) = 0 \quad (\text{A4.93})$$

Autrement dit, les valeurs singulières σ sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice $A^T A$ ou de la matrice $A^* A$, si A est une matrice de nombres complexes. A^* représente alors le conjugué de la matrice transposée A^T .

Exemple A4.4 :

Calculons les valeurs singulières de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

1) Calculons la matrice $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{pmatrix}$$

2) Déterminons les valeurs singulières de la matrice A :

Les valeurs propres de la matrice $A^T A$ sont :

$$\det \begin{pmatrix} 26 - \lambda & 18 \\ 18 & 74 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (26 - \lambda) \times (74 - \lambda) - 18 \times 18 = \lambda^2 - 100\lambda + 1600 = 0$$

Soit : $\lambda_1 = 20$ et $\lambda_2 = 80$.

Ainsi, les valeurs singulières de la matrice A sont :
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2\sqrt{5} \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 4\sqrt{5} \end{cases}$$

❖ Décomposition en valeurs singulières :

La décomposition en valeurs singulières de la matrice A est définie par l'équation :

$$AV = U\Sigma \text{ soit } A = U\Sigma V^T \quad (\text{A4.94})$$

Avec :

- ❖ U : la matrice orthonormale composée des vecteurs propres de la matrice AA^T
- ❖ Σ : la matrice diagonale composée des valeurs singulières de la matrice A
- ❖ V : la matrice orthonormale composée des vecteurs propres de la matrice $A^T A$

Exemple A4.5 :

Effectuons la décomposition en valeurs singulières de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

1) Déterminons la matrice Σ : En reprenant l'exemple A4.4, nous obtenons :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

2) Déterminons les vecteurs propres de la matrice $A^T A$:

❖ Pour $\lambda_1 = 20$:

$$\begin{pmatrix} 26 - \lambda_1 & 18 \\ 18 & 74 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} 6x_{11} + 18x_{21} = 0 \\ 18x_{11} + 54x_{21} = 0 \end{cases} \implies x_{11} = -3x_{21}$$

Prenons, par exemple, le vecteur propre $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

❖ Pour $\lambda_2 = 80$:

$$\begin{pmatrix} 26 - \lambda_2 & 18 \\ 18 & 74 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 & 18 \\ 18 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} -54x_{12} + 18x_{22} = 0 \\ 18x_{12} - 6x_{22} = 0 \end{cases} \implies x_{12} = \frac{1}{3}x_{22}$$

Prenons, par exemple, le vecteur propre $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Nous obtenons ainsi la matrice $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Déterminons la matrice $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$:

Basons-nous sur le processus de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la matrice X .

Posons les rangées $z_1 = (3 \ 1)$ et $z_2 = (-1 \ 3)$ de la matrice X , les vecteurs v_1 et v_2 sont les vecteurs orthonormalisés respectifs des vecteurs z_1 et z_2 .

$$\text{❖ } v_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} (3 \ 1) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\text{❖ } v_2 = \frac{z_2 - \frac{\langle z_2, z_1 \rangle}{\langle z_1, z_1 \rangle} z_1}{\|z_2 - \frac{\langle z_2, z_1 \rangle}{\langle z_1, z_1 \rangle} z_1\|} = \frac{(-1 \ 3)}{\|(-1 \ 3)\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} (-1 \ 3) = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} \quad \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\text{Car } \langle z_2, z_1 \rangle = (-1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{D'où } V = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } V^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

4) Déterminons les vecteurs propres de la matrice AA^T :

$$AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice AA^T sont :

$$\det \begin{pmatrix} 50 - \lambda & 30 \\ 30 & 50 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (50 - \lambda) \times (50 - \lambda) - 30 \times 30 = \lambda^2 - 100\lambda + 1600 = 0$$

Soit : $\lambda_1 = 20$ et $\lambda_2 = 80$.

Les vecteurs propres sont alors respectivement pour $\lambda_1 = 20$ et $\lambda_2 = 80$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi la matrice $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

5) Déterminons la matrice $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$:

De la même manière que pour la matrice V , utilisons le processus de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la matrice Y , soient les rangées $t_1 = (1 \ 1)$ et $t_2 = (-1 \ 1)$ associées à la matrice Y . Les vecteurs u_1 et u_2 sont les vecteurs normalisés et orthogonaux respectifs des vecteurs t_1 et t_2 .

$$\ast u_1 = \frac{t_1}{\|t_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} (1 \ 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\ast u_2 = \frac{t_2 - \frac{\langle t_2, t_1 \rangle}{\langle t_1, t_1 \rangle} t_1}{\|t_2 - \frac{\langle t_2, t_1 \rangle}{\langle t_1, t_1 \rangle} t_1\|} = \frac{(-1 \ 1)}{\|(-1 \ 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} (-1 \ 1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Car : } \langle t_2, t_1 \rangle = (-1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Nous obtenons : } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ainsi, la décomposition en valeurs singulières de la matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

ANNEXE A5 : CALCULS DES PROBABILITÉS DE BLOPAGE

En vue de démontrer les formules de probabilité de blocage des modèles statistiques d'Erlang B, d'Erlang C et de Poisson, considérons les hypothèses suivantes relatives au trafic :

- ❖ Les appels sont aléatoires et indépendants les uns des autres.
- ❖ La probabilité qu'un appel soit demandé est la même pour tous les abonnés.
- ❖ La durée des conversations est identique pour tous les abonnés ou bien, elle a une distribution exponentielle décroissante.

Soit $p(i)$, la période de temps durant laquelle i lignes sont utilisées. Si l'on prend en considération l'ensemble des possibilités d'occupation des lignes, nous avons :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p(i) = 1 \quad (\text{A5.1})$$

Soit C , le nombre d'appels par unité de temps. En multipliant C par la formule (A5.1), nous obtenons :

$$C \times \sum_{i=0}^{+\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{+\infty} C \times p(i) = C \quad (\text{A5.2})$$

Soit T , la durée moyenne d'un appel et Q le trafic en Erlangs. D'après la formule (5.16) nous avons :

$$Q = C \times T \quad (\text{A5.3})$$

Nous pouvons définir le nombre moyen de lignes occupées par unité de temps comme suit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i p(i) = Q \quad (\text{A5.4})$$

Exemple A5.1 :

Prenons le cas d'un système composé de trois lignes comme :

- ❖ $p(0) = 0.1$ = proportion du temps durant laquelle aucune ligne n'est utilisée ;
- ❖ $p(1) = 0.5$ = proportion du temps durant laquelle 1 ligne est utilisée ;
- ❖ $p(2) = 0.3$ = proportion du temps durant laquelle 2 lignes sont utilisées ;
- ❖ $p(3) = 0.1$ = proportion du temps durant laquelle toutes les lignes sont utilisées.

En reprenant les formules (A5.1) et (A5.4), nous obtenons respectivement :

$$\begin{aligned} \text{❖ } \sum_{i=0}^3 p(0) + p(1) + p(2) + p(3) &= 0.1 + 0.5 + 0.3 + 0.1 = 1 \\ \text{❖ } \sum_{i=0}^3 0 \times p(0) + 1 \times p(1) + 2 \times p(2) + 3 \times p(3) &= 1 \times 0.5 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 \\ &= 1.4 \end{aligned}$$

Soit en moyenne, 1.4 lignes sont occupées par unité de temps.

Grâce aux formules (A5.2) à (A5.4), nous pouvons mettre en évidence le nombre d'appels par unité de temps :

$$C = \frac{Q}{T} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{T} \times p(i) = \sum_{i=0}^{+\infty} C \times p(i) \quad (\text{A5.5})$$

Lorsque i lignes sont occupées, le nombre de lignes supplémentaires occupées doit être égal au nombre de lignes en moins disponibles dans le système, et vice versa. Le nombre de transitions de l'état i à l'état $i - 1$ lignes occupées est identique au nombre de transitions de l'état $i - 1$ à i lignes occupées.

L'augmentation $\frac{i}{T}p(i)$ correspond au nombre de transitions par unité de temps de i lignes à $(i - 1)$ lignes occupées. L'expression $Cp(i - 1)$ représente quant à elle le nombre de transitions par unité de temps de $(i - 1)$ à i lignes utilisées. Ces deux expressions sont égales. Aussi nous avons :

$$\frac{i}{T} \times p(i) = C \times p(i - 1) \quad (\text{A5.6})$$

Pour différentes valeurs de i , nous avons d'après la formule (A5.6) :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(1) = \frac{C.T}{1} p(0) = \frac{Q}{1} p(0) \\ p(2) = \frac{C.T}{2} p(1) = \frac{Q^2}{1.2} p(0) = \frac{Q^2}{2!} p(0) \\ p(3) = \frac{C.T}{3} p(2) = \frac{Q^3}{2.3} p(0) = \frac{Q^3}{3!} p(0) \\ \vdots \\ p(i) = \frac{(C.T)^i}{i!} p(0) = \frac{Q^i}{i!} p(0) \end{array} \right. \quad (\text{A5.7})$$

Aussi, en reprenant les formules (A5.1) et (A5.7), nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{Q^i}{i!} p(0) = 1 \quad (\text{A5.8})$$

Or : $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{Q^i}{i!} \right)_{i \rightarrow +\infty} = e^Q$, car la somme est convergente.

Ainsi : $p(0) = e^{-Q}$ (A5.9)

C'est-à-dire : $p(i) = \frac{Q^i}{i!} e^{-Q}$ (A5.10)

❖ **Cas de la statistique de Poisson :**

Selon le modèle de Poisson, le nombre d'appels bloqués correspond au nombre d'appels entrants lorsque toutes les N lignes sont occupées (c'est-à-dire lorsqu'il y a blocage). Soit :

$$\sum_{i=N}^{+\infty} C p(i) \quad (\text{A5.11})$$

C'est-à-dire, d'après la formule (A5.10) : $\sum_{i=N}^{+\infty} C \times \frac{Q^i}{i!} e^{-Q}$ (A5.12)

La probabilité de blocage est le rapport du nombre d'appels bloqués sur le nombre d'appels offerts par unité de temps C, soit :

$$P_p(N, Q) = \sum_{i=N}^{+\infty} \frac{Q^i}{i!} e^{-Q} \quad (\text{A5.13})$$

❖ **Cas de la statistique d'Erlang B :**

D'après les hypothèses caractéristiques au modèle d'Erlang B, tous les appels entrants lorsque toutes les lignes sont occupées sont rejetés. Aussi, les formules (A5.1), (A5.2), (A5.9) et (A5.10) se trouvent respectivement modifier comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \text{❖ } \sum_{i=0}^{+\infty} p(i) = 1 \text{ devient } \sum_{i=0}^N p(i) = 1 \\
 & \text{❖ } \sum_{i=0}^{+\infty} C \times p(i) \text{ devient } \sum_{i=0}^N C \times p(i) \\
 & \text{❖ } p(0) = e^{-Q} \text{ devient } p(0) = \frac{1}{\sum_{i=0}^N \frac{Q^i}{i!}} \\
 & \text{❖ } p(i) = \frac{Q^i}{i!} e^{-Q} \text{ devient } p(i) = \frac{\frac{Q^i}{i!}}{\sum_{j=0}^N \frac{Q^j}{j!}}
 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de blocage pour N lignes est :

$$P_B(N, Q) = \frac{\frac{Q^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{Q^i}{i!}} \quad (\text{A5.14})$$

❖ **Cas de la statistique d'Erlang C :**

Contrairement au modèle d'Erlang B, lorsque toutes les lignes sont occupées, les appels entrants ne sont plus rejetés mais recomposés indéfiniment. Il s'ensuit deux cas :

❖ **Premier cas : $i \leq N - 1$**

L'équation (A5.6) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{(i+1)}{T} \times p(i+1) = C \times p(i) \quad (\text{A5.15})$$

$$\text{Soit pour : } i = N - 1 : \frac{N}{T} \times p(N) = C \times p(N - 1) \quad (\text{A5.16})$$

❖ **Second cas : $i \geq N$**

$$\frac{N}{T} \times p(N+1) = C \times p(N) \quad (\text{A5.17})$$

$$\text{Soit en fonction de } i : \frac{N}{T} \times p(i+1) = C \times p(i) \quad (\text{A5.18})$$

Additionnons maintenant tous les termes $i > N$:

$$p(N+1) + p(N+2) + p(N+3) + \dots = p(N) \left[\frac{CT}{N} + \frac{(CT)^2}{N^2} + \frac{(CT)^3}{N^3} + \dots \right] \quad (\text{A5.19})$$

La formule (A5.19) correspond à une suite géométrique qui converge.

Nous pouvons donc la réécrire sous la forme suivante :

$$p(N) \times \left[\frac{CT}{N-CT} \right] = p(N) \times \left[\frac{Q}{N-Q} \right] \quad (\text{A5.20})$$

Ainsi, la formule (A5.1) suivante $\sum_{i=0}^{+\infty} p(i) = 1$ devient :

$$\sum_{i=0}^{N-1} p(i) + \sum_{i=N}^{+\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Q^i}{i!} p(0) + \sum_{i=N}^{+\infty} p(i) = 1 \quad (\text{A5.21})$$

$$\text{Or: } \sum_{i=N}^{+\infty} p(i) = p(N) + p(N) \times \frac{Q}{N-Q} \quad (\text{d'après les formules (A5.18) et (A5.19)})$$

Soit en reprenant la formule (A5.20) :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{N-1} p(i) + \sum_{i=N}^{+\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Q^i}{i!} p(0) + p(N) + p(N) \times \frac{Q}{N-Q} = 1 \quad (\text{A5.22})$$

Or, en nous basant sur la formule (A5.10), nous déduisons la relation de $p(N)$:

$$p(N) = \frac{Q^N}{N!} p(0) \quad (\text{A5.23})$$

$$\text{Soit : } \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Q^i}{i!} p(0) + \frac{Q^N}{N!} p(0) \times \frac{N}{N-Q} = 1 \quad (\text{A5.24})$$

La formule (A5.24) nous permet de mettre en évidence la formule $p(0)$:

$$p(0) \times \left[\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Q^i}{i!} + \frac{Q^N}{N!} \times \frac{N}{N-Q} \right] = 1$$

$$\text{Soit : } p(0) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Q^i}{i!} + \frac{Q^N}{N!} \times \frac{N}{N-Q}} \quad (\text{A5.25})$$

Ainsi, la probabilité qu'un appel soit bloqué est :

$$\sum_{i=N}^{+\infty} p(i) = p(N) + p(N) \times \frac{Q}{N-Q} = p(N) \times \frac{N}{N-Q}$$

C'est-à-dire d'après les formules (A5.23) et (A5.25) :

$$\sum_{i=N}^{+\infty} p(i) = \frac{Q^N}{N!} p(0) \times \frac{N}{N-Q} \quad (\text{A5.26})$$

$$\text{Soit : } P_C(N, Q) = \frac{\frac{Q^N}{N!} \times \frac{N}{N-Q}}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Q^i}{i!} + \frac{Q^N}{N!} \times \frac{N}{N-Q}} \quad (\text{A5.27})$$